TEOREMA DOS RESÍDUOS

Profesor Marcio Cohen <marciocohen@gmail.com>
Colégio Ponto de Ensino

1. DEFINIÇÕES

EULER: $e^{ix} = \cos x + isenx$

LOGARITMO: $z = re^{i\theta} \Rightarrow \ln z = \ln r + i(\theta + 2k\pi),\ k \in Z$

(i) Costuma-se definir o valor principal do *ln* acima quando *k* = 0 e $0 < \theta < 2\pi$.

(ii) Obs: Para que o LOG seja uma função, uma opção é restringi-lo ao conjunto $C \setminus R_+$

(iii) Obs**:** $w = z^{\alpha} \Rightarrow w = e^{\alpha \ln z}$

(iv) As relações acima definidas não são funções, a não ser que estejam restritas em algum ramo

2. FUNÇÃO HOLOMORFA

$f : C \to C$ é dita holomorfa em *a* quando existe uma vizinhança de *a* na qual *f* é derivável.

3. SINGULARIDADE

É um ponto z_0 do domínio da *f* onde sua derivada não existe. Os principais tipos de singularidade são:

POLO: Quando $\exists n \in \mathrm{N}^*; \lim_{z \to z_0} (z - z_0)^n f(z) = A \in C^*$, onde *n* é dito ordem do pólo.

REMOVÍVEL: Quando $\lim_{z \to z_0} f(z) \in C$

ESSENCIAL: Quando a função apresenta uma singularidade que não é pólo nem é removível.

4. INTEGRAÇÃO: $z = x + iy,\ \ f(z) = u + iv$

$$\int_C f(z)dz = \int_C (u + iv)(dx + idy)$$

Para integrar, basta parametrizar a curva *C* e então efetuar a integral normalmente (é uma integral de linha).

Definição: Dada uma curva fechada *C*, denotaremos por *R*(C) a região limitada por *C* (incluindo seu bordo).

5. CAUCHY-GOURSAT: Se *f* é analítica em *R*(C), então $\oint_C f(z)dz = 0$

6. CAUCHY: $f(z_0) = \dfrac{1}{2\pi i} \oint_C \dfrac{f(z)}{z - z_0} dz$ se *f* for holomorfa em *R*(C).

7. SÉRIE DE LAURENT: Sejam C_1 e C_2 círculos concêntricos de raios $r_1 > r_2$ e centro z_0. Se *f* é função holomorfa no anel assim definido, então podemos escrever:

$$f(z) = \ldots + \frac{a_{-2}}{(z - z_0)^2} + \frac{a_{-1}}{(z - z_0)} + a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \ldots,$$

onde a_{-1} é denominado resíduo da função e é a parte mais importante dessa aula.

Se *a* for um pólo de ordem 1, então $res_{z_0} f = a_{-1} = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z)$

Obs: Se z_0 é pólo de ordem *k*, então a série é finita à esquerda e

$$a_{-1} = \lim_{z \to z_0} \frac{1}{(k-1)!} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} (z - z_0)^k f(z).$$

8. TEOREMA DOS RESÍDUOS: Se *f* é holomorfa em *R*(C) exceto em pólos *a*, *b*, *c*, ... temos:

$$\oint_C f(z)dz = 2\pi i(a_{-1} + b_{-1} + c_{-1} + \ldots) = 2\pi i \sum_{z_0} res_{z_0} f$$

9. LEMAS IMPORTANTES:

9.1. Se existe um real *M* e um *k* > 1 tal que $|f(z)| \le \frac{M}{r^k}$, $z = re^{i\theta}$, então $\oint_\Gamma f(z)dz = 0$ quando Γ é o semi-círculo de centro na origem e raio *r*.,

9.2. Se existe um real *M* e um *k* > 0 tal que $|f(z)| \le \frac{M}{r^k}$, $z = re^{i\theta}$, então $\oint_\Gamma e^{imz} f(z)dz = 0$ quando Γ é o semi-círculo de centro na origem e raio *r*.,

9.3. Seja C_N o quadrado simétrico em relação a origem de lado 2N+1. Se *f* é tal que $|f(z)| \le \frac{M}{|z|^k}$, (*k* > 1e *M* constante) em C_N, com *k*, *M* independentes de *N*, então: $\sum_{-\infty}^{\infty} f(n) = -\sum_{z_0 \, polo de \, f} \pi \cot(\pi z) f(z)$

EXERCÍCIOS

1. Calcule $I(a) = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a + \cos\theta}, \; a > 1$
2. (IMC adaptado) $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{sen(nx)}{senx} dx$
3. $\int_0^\infty \frac{1}{1+x^5} dx$
4. $\int_0^\infty \frac{(\log x)^2}{x^2+1}$
5. $\int_0^\infty \frac{senx}{x} dx$
6. $\int_0^\infty e^{-x^2} dx$
7. $\int_0^\infty \frac{\cos(mx)}{x^2+1} dx$
8. (OBM) $\int_0^\pi \ln(1 - 2r\cos\theta + r^2) d\theta$
9. $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2+a^2}$
10. $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^4}$
11. (IMC) $\sum_{ramos} (\log z)^{-4}$
12. $1 - \frac{1}{3^5} + \frac{1}{5^5} - \frac{1}{7^5} + \ldots$