Reta de Simson

Nível 2

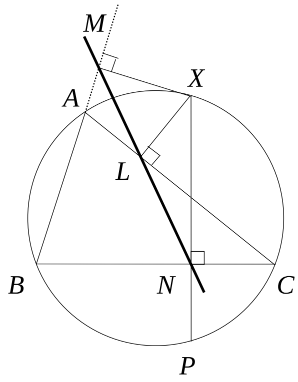
Marcelo Mendes de Oliveira
marcelom@ceara.net

Introdução

Apesar de essa reta famosa ter sido descoberta por William Wallace em 1797, por descuido atribuiu-se falsamente, à época, o resultado a Robert Simson (1687-1768). Os seguintes problemas apresentam propriedades e aplicações da Reta de Simson ou Reta de Simson-Wallace.

Reta de Simson

RETA DE SIMSON: Se perpendiculares são traçadas a partir de um ponto sobre o circuncírculo de um triângulo a seus lados, suas interseções com os lados do triângulo são colineares e pertencem à *Reta de Simson*. (A recíproca também é verdadeira.)



De fato, $\angle NLC = \angle NXC$ (quadrilátero $NLXC$) e $\angle ALM = \angle AXM$ (quadrilátero $ALXM$) e, além disso, $\angle NXC$ e $\angle AXM$ somados com $\angle AXN$ suplementam $\angle ABC$. Segue que $\angle NLC = \angle ALM$ e M, L, N são colineares.

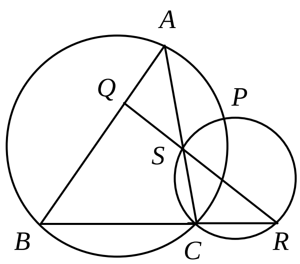
EXEMPLO: Se a perpendicular XN a BC corta o circuncírculo novamente em P, então AP é paralela à Reta de Simson de X.

Problemas Propostos

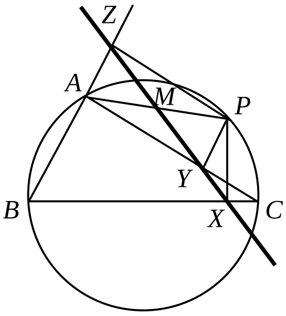
01. A altura AD do ΔABC corta o circuncírculo em P. Prove que a Reta de Simson de P em relação a ABC é paralela à reta tangente ao círculo em A.

02. A partir de um ponto P sobre o circuncírculo de ABC, são traçadas as perpendiculares PX, PY e PZ aos lados AC, AB e BC, respectivamente. Prove que $PA \times PZ = PB \times PX$.

03. Na figura a seguir, os lados AB, BC e CA do ΔABC são cortados pela transversal nos pontos Q, R e S, respectivamente. Os circuncírculos do ΔABC e do ΔSCR se intersectam em P. Prove que o quadrilátero $APSQ$ é inscritível.



04. Na figura a seguir, o triângulo ABC retângulo em A, está inscrito no círculo de centro O. A Reta de Simson do ponto P em relação a ABC corta PA em M. Prove que MO é perpendicular a PA.



05. A partir de um ponto P sobre a circunferência do círculo de centro O, três cordas são desenhadas cortando o círculo nos pontos A, B e C. Prove que os três pontos de interseção dos três círculos de diâmetros PA, PB e PC são colineares.

06. P é um ponto qualquer sobre o diâmetro do circuncírculo do quadrilátero inscritível $ABCD$. Se PK, PL, PM, PN são as perpendiculares a partir de um ponto P aos lados AB, BC, CD, DA, respectivamente, prove que $PK \times PM = PL \times PN$.

07. No circuncírculo do ΔABC, a corda PQ é desenhada paralela ao lado BC. Prove que as Retas de Simson do ΔABC em relação a P e Q são concorrentes na altura AD do ΔABC.

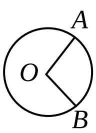
08. A reta unindo p ortocentro de um dado triângulo a um ponto do circuncírculo do triângulo é bissectada pela Reta de Simson desse ponto.

09. A medida do ângulo determinado pelas Retas de Simson de dois pontos dados sobre o circuncírculo de um dado triângulo é igual à metade do arco determinado por esses pontos.

10. Prove que se três pontos são escolhidos ao acaso sobre o circuncírculo, então o triângulo formado por esses pontos é semelhante ao triângulo formado pelas Retas de Simson desses pontos em relação à qualquer triângulo inscrito.

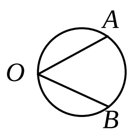
11. Considere dois triângulos estão inscritos no mesmo círculo e um ponto sobre o circuncírculo determinando uma Reta de Simson para cada triângulo. Prove que o ângulo formado por essas duas Retas de Simson é constante, independente da posição do ponto.

Assuntos Relacionados



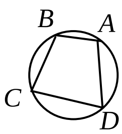
$\angle AOB = \cap AB$

Ângulo central



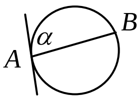
$\angle AOB = \dfrac{\cap AB}{2}$

Ângulo inscrito



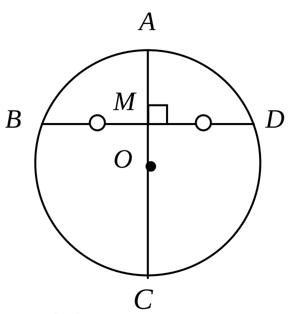
$\angle A + \angle C = 180^o$
$\angle B + \angle D = 180^o$

Quadrilátero Inscritível



$\alpha = \dfrac{\cap AB}{2}$

Ângulo de Segmento



O diâmetro pelo ponto médio M da corda BD é perpendicular a BD

Bibliografia

- Posamentier, Alfred S., *Challenging Problems in Geometry*, Dover Publications, New York, 1996