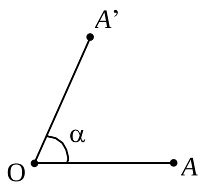
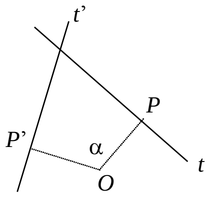
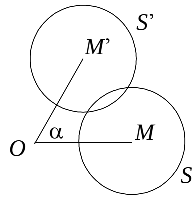
Rotações

Sejam *O* um ponto no plano e α um ângulo dado; adotemos um sentido de rotação (digamos, por exemplo, o sentido anti-horário). Seja *A* um ponto arbitrário no plano; Dizemos que o ponto *A*' é obtido do ponto *A* através de uma rotação com centro em *O* e ângulo de rotação igual a α, se *A*' é o ponto do plano tal que $AO = A'O$ e $\angle AOA' = \alpha$.

Em particular, uma reta *t* é transformada, por uma rotação sobre um ponto *O*, em uma outra reta, *t'*. Para achar *t'* é suficiente rotacionar o ponto *P*, pé da perpendicular de *O* sobre *t*, e então passar uma reta por *P*' perpendicular a *OP*'. Um círculo *S* é transformado em um círculo *S*' por uma rotação sobre o ponto *O*; para construir *S*' basta rotacionar o centro *M* do círculo *S* sobre o ponto *O* e, então, construir um círculo congruente a *S* com centro em *M*'.







Exercícios:

1. (a) Considere um triângulo eqüilátero *ABC* inscrito em um círculo Γ, e seja *P* um ponto sobre o menor arco *BC* de Γ. Prove que $PB + PC = PA$.
(b) Em um dado triângulo *ABC* qualquer, determine um ponto *P* no seu interior tal que $PA + PB + PC$ seja mínimo. (Problema de *Fermat*)

2. (Alemanha - 94) Em um plano considere uma reta *g* e um ponto *A* fixo, não pertencente a *g*. Um ponto *P* corre sobre *g*. Determine o conjunto dos pontos *X* do plano de modo que *X*, *A* e *P* formem os vértices de um triângulo eqüilátero.

3. Sobre os lados *BC* e *CD* de um quadrado *ABCD*, tomamos pontos *M* e *K*, respectivamente, tais que o perímetro do triângulo *CMK* seja igual ao dobro do lado do quadrado. Determine o ângulo $M\hat{A}K$.

4. (Irã - 95) Suponha que *ABCD* é um quadrado e *K* e *N* são pontos sobre *AB* e *AD*, respectivamente, tal que $AK \cdot AN = 2 \cdot BK \cdot DN$. Sejam *L* e *M* os pontos de interseção da diagonal *BD* com *CK* e *CN*, respectivamente. Prove que os pontos *K, L, M, N* e *A* são concíclicos.

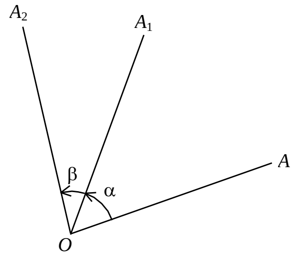
5. Seja *P* um ponto no interior do quadrado *ABCD* tal que as distâncias de *P* aos vértices *A*, *B* e *C* sejam proporcionais, respectivamente, a 1, 2 e 3. Determine o ângulo $\angle APB$.

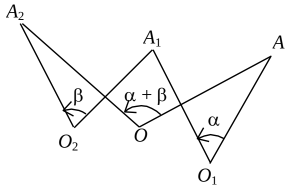
6. Em um plano são dados um círculo *C* com diâmetro sobre a reta *l*, e um ponto *P* em *C*, não pertencente a *l*. Construa todos os triângulos eqüiláteros que têm um vértice em *P* um em *C* e o outro sobre o diâmetro *l*.

7. Ache todos os triângulos eqüiláteros cujos vértices encontram-se sobre três retas paralelas dadas ou sobre três círculos concêntricos.

Composição de Rotações

Considere duas rotações sucessivas (no mesmo sentido) com centro comum *O* e com ângulos de rotação iguais a α e β, respectivamente. É imediato que estas duas rotações são equivalentes a uma única rotação com centro *O* e ângulo (α + β). No entanto, o que podemos afirmar se o centro da primeira rotação for diferente do centro da primeira? A verdade é que estas duas rotações continuarão sendo equivalentes a uma única rotação, com centro em algum ponto *O* do plano e de ângulo (α + β). Veremos como encontrar este *centro de rotação*.





Seja F_1 a figura obtida a partir de F por uma rotação com centro O_1 e ângulo de rotação α, e seja F' a figura obtida a partir de F_1 por uma rotação (no mesmo sentido) com centro O_2 e ângulo β. Se a primeira rotação leva o segmento AB da figura F a um segmento A_1B_1 da figura F_1, e se a segunda rotação leva o segmento A_1B_1 a um segmento $A'B'$ da figura F', então, os segmentos AB e A_1B_1 são iguais e formam um ângulo α; os segmentos A_1B_1 e $A'B'$ são iguais e formam um ângulo β. Segue que os segmentos AB e $A'B'$ são iguais e formam um ângulo $\alpha + \beta$. (Se $\alpha + \beta = 360°$, significa dizer que os segmentos correspondentes das figuras F e F' são paralelos). Mas, então, existe uma rotação com centro em um ponto O que leva a figura F até a figura F'. Assim, concluímos que as figuras F e F' estão relacionadas por uma rotação, se $\alpha + \beta \neq 360º$, e por uma translação se $\alpha + \beta = 360°$.

Mostraremos como encontrar o centro O a partir de O_1 e O_2 e dos ângulos α e β. Suponha inicialmente que $\alpha + \beta \neq 360°$. Nesse caso, a soma das duas rotações é uma rotação com ângulo igual a $\alpha + \beta$. Vamos achar o seu centro.

As duas rotações levam o ponto O_1 da primeira rotação até o ponto O_1', tal que $O_1O_2 = O_1'O_2$ e $\angle O_1O_2O_1' = \beta$. (A primeira deixa O_1 fixo e a segunda leva O_1 até O_1'). Além disso, estas duas rotações levam o ponto O_2'' até o ponto O_2, tal que $O_2''O_1 = O_2O_1$ e $\angle O_2''O_1O_2 = \alpha$.(A primeira leva O_2'' até O_2 e a segunda deixa O_2 fixo).

Segue que o centro O que estamos procurando é eqüidistante de O_2 e O_2'' e de O_1 e O_1'; conseqüentemente, o ponto O coincide com o ponto de interseção das mediatrizes l_1 e l_2 de O_1O_1' e O_2O_2'', respectivamente. Mas, é claro que l_1 passa por O_1 e $\angle l_1O_1O_2 = \alpha/2$, que l_2 passa por O_2 e $\angle l_2O_1O_2 = \beta/2$. As retas l_1 e l_2 são determinadas sob estas condições, sua interseção nos dá o ponto O desejado.

Se $\alpha + \beta = 360°$, então, as duas rotações equivalem a uma translação, de modo que elas levam O_1 até O_1'(ou O_2 até O_2'); neste caso, é fácil notar que l_1 e l_2 serão paralelas entre si e perpendiculares à direção de translação, de tal modo que a distância entre l_1 e l_2 é igual à metade da distância de translação.

Exercícios

1. (a) Construa triângulos eqüiláteros sobre os lados de um triângulo arbitrário ABC. Prove que os centros O_1, O_2 e O_3 desses triângulos são vértices de um triângulo eqüilátero.

(b) Sobre os lados de um triângulo arbitrário ABC, construímos triângulos isósceles BCA_1, ACB_1 e ABC_1, externamente ao triângulo, com ângulos nos vértices A_1, B_1 e C_1 iguais a α, β e δ, respectivamente. Prove que, se $\alpha + \beta + \delta = 360°$, então, os ângulos do triângulo $A_1B_1C_1$ são iguais a $\alpha/2$, $\beta/2$ e $\delta/2$.

2. Sobre os lados de um triângulo arbitrário ABC, construímos triângulos eqüiláteros BCA_1, ACB_1 e ABC_1, tal que os vértices A e A_1 estão sobre lados opostos de BC, B_1 e B estão sobre lados opostos de AC, mas C_1 e C estão sobre o mesmo lado de AB. Seja M o centro do triângulo ABC_1. Prove que $B_1M = MA_1$ e $\angle B_1MA_1 = 120°$.

3. Sobre os lados de um quadrilátero convexo $ABCD$, quadrados são construídos, exteriormente. Os centros desses quadrados são M_1, M_2, M_3 e M_4. Mostre que $M_1M_3 = M_2M_4$ e $M_1M_3 \perp M_2M_4$.

4. **(IMO – 1975)** Sobre os lados de um triângulo qualquer ABC, triângulos ABR, BCP e CAQ são construídos, externamente, com $\angle CBP = \angle CAQ = 45°$, $\angle BCP = \angle ACQ = 30°$, $\angle ABR = \angle BAR = 15°$. Prove que $\angle QRP = 90°$ e $QR = RP$.

5. O ponto M está no interior do quadrilátero convexo $ABCD$ de modo que os triângulos AMB e CMD são isósceles ($AM = MB$, $CM = MD$) e $\angle AMB = \angle CMD = 120°$. Prove que existe um ponto N tal que os triângulos BNC e DNA são eqüiláteros.