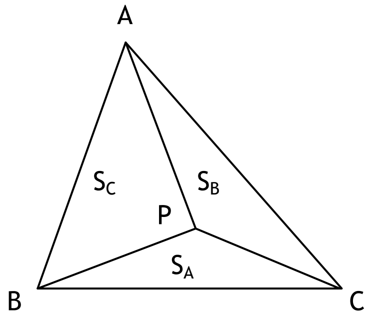
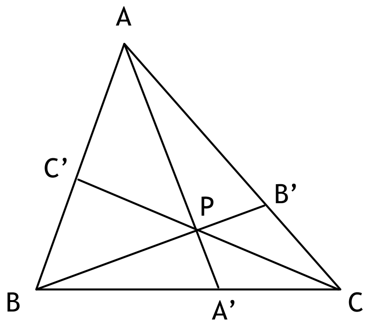
Marcelo Mendes e Cícero Thiago
Grupo Teorema de Matemática

Apresentaremos aqui uma simples, poderosa e útil ferramenta geométrica para problemas envolvendo razões de segmentos. Como convenção, denotemos por [Q] a área do polígono Q.

Seja ABC um triângulo e P, um ponto em seu interior. Sejam $S=[ABC]$, $S_A=[PBC]$, $S_B=[PAC]$ e $S_C=[PAB]$ (veja a figura abaixo, à esquerda). Temos $S = S_A + S_B + S_C$.





Agora, prolongue AP até A' sobre BC, e defina B' e C' analogamente (veja figura acima, à direita). Como triângulos com mesma altura têm áreas proporcionais a suas bases, temos:

$$\frac{AP}{PA'} = \frac{[PAB]}{[PBA']} = \frac{[PAC]}{[PCA']} = \frac{[PAB]+[PAC]}{[PBA']+[PCA']} = \frac{S_C+S_B}{S_A}.$$

Analogamente, $\frac{BP}{PB'} = \frac{S_A+S_C}{S_B}$ e $\frac{CP}{PC'} = \frac{S_A+S_B}{S_c}$. Por outro lado, também temos

$$\frac{BA'}{A'C} = \frac{[PBA']}{[PCA']} = \frac{[ABA']}{[ACA']} = \frac{[PAB]}{[PAC]} = \frac{S_C}{S_B}.$$

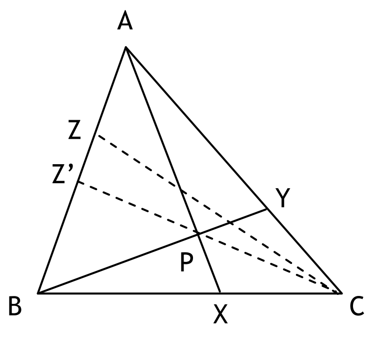
Da mesma forma, $\frac{CB'}{B'A} = \frac{S_A}{S_C}$ e $\frac{AC'}{C'B} = \frac{S_B}{S_A}$.

Vejamos alguns exemplos.

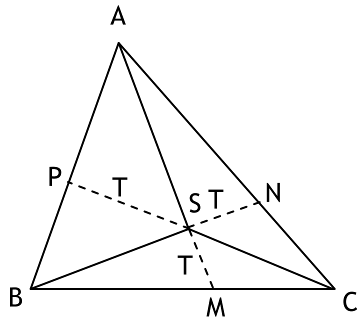
Exemplo 1: Prove o teorema de Ceva: AX, BY, CZ são cevianas concorrentes de um triângulo ABC $\Leftrightarrow \frac{AZ}{ZB}\cdot\frac{BX}{XC}\cdot\frac{CY}{YA} = 1$.

Solução: Primeiro, suponha que AX, BY, CZ sejam concorrentes. Pela teoria acima, temos $\frac{AZ}{ZB} = \frac{S_B}{S_A}$, $\frac{BX}{XC} = \frac{S_C}{S_B}$, $\frac{CY}{YA} = \frac{S_A}{S_C}$ e, diretamente, $\frac{AZ}{ZB}\cdot\frac{BX}{XC}\cdot\frac{CY}{YA} = 1$.

Reciprocamente, se $\frac{AZ}{ZB}\cdot\frac{BX}{XC}\cdot\frac{CY}{YA} = 1$ e CZ não passasse pela interseção P de AX e BY, então, sendo Z' a interseção de CP e AB, teríamos pela primeira parte que $\frac{AZ'}{Z'B}\cdot\frac{BX}{XC}\cdot\frac{CY}{YA} = 1$. Portanto $\frac{AZ}{ZB} = \frac{AZ'}{Z'B}$, um absurdo. Logo, CZ passa por P e AX, BY e CZ são concorrentes.

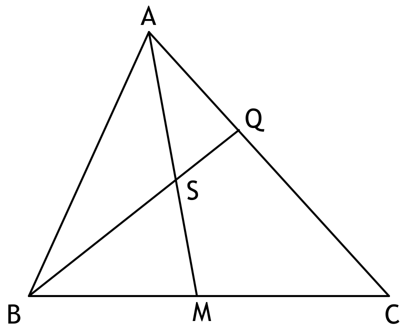


Exemplo 2: (HUNGRIA/1936) S é um ponto no interior do ΔABC tal que as áreas dos triângulos ABS, BCS, CAS são todas iguais. Prove que S é o baricentro de ABC.



Solução: Seja T a área dos triângulos ABS, BCS, CAS. Daí, sendo M, N e P as interseções de AS, BS e CS com os lados opostos, temos $\frac{BM}{MC} = \frac{CN}{NA} = \frac{AP}{PB}$, isto é, M, N e P são os pontos médios dos lados BC, CA e AB e, portanto, S é o baricentro de ABC.

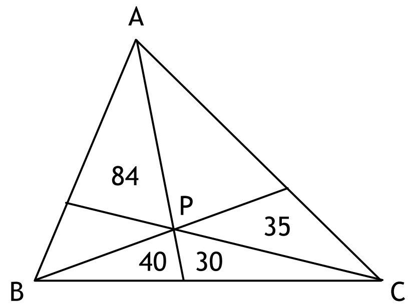
Exemplo 3: Em um triângulo ABC, seja S o ponto médio da mediana correspondente ao vértice A e Q, o ponto de interseção de BS com o lado AC. Mostre que BS = 3QS.



Solução: Seja M o ponto médio do lado BC. Observe que [ABS] = [MBS] = P, pois ambos tem a mesma base e a mesma altura. Com o mesmo argumento [MBS] = [MCS] = P. Portanto, [ABM] = 2P = [ACM] = P + [ACS] $\Rightarrow$ [ACS] = P. Assim , $\frac{BS}{QS} = \frac{[ABS]+[BCS]}{[ACS]} = \frac{P+2P}{P} = 3$.

Problemas Propostos

1. (IME/1990; AIME/1985) Seja P um ponto no interior de um triângulo ABC, dividindo-o em seis triângulos, quatro dos quais têm áreas 40, 30, 35 e 84, como mostra a figura. Calcule a área do triângulo ABC.



2. (IMO/1961) Considere triângulo $P_1P_2P_3$ e um ponto P no interior do triângulo. As retas P_1P, P_2P, P_3P intersectam os lados opostos nos pontos Q_1, Q_2, Q_3, respectivamente. Prove que dos números $\frac{P_1P}{PQ_1}, \frac{P_2P}{PQ_2}, \frac{P_3P}{PQ_3}$, ao menos um é ≤ 2 e ao menos um é ≥ 2.

3. (AIME/1992) No triângulo ABC, A', B', C' estão sobre os lados BC, AC e AB, respectivamente. Dado que AA', BB', CC' são concorrentes no ponto O e que $\frac{AO}{OA'} + \frac{BO}{OB'} + \frac{CO}{OC'} = 92$, encontre o valor de $\frac{AO}{OA'} \cdot \frac{BO}{OB'} \cdot \frac{CO}{OC'}$.

4. Seja P um ponto no interior do ΔABC. Sejam D, E, F as interseções de AP, BP, CP com BC, CA, AB, respectivamente. Prove que $\frac{PA}{PD} \cdot \frac{PB}{PE} + \frac{PB}{PE} \cdot \frac{PC}{PF} + \frac{PC}{PF} \cdot \frac{PA}{PD} \geq 12$.

5. No triângulo ABC, os pontos L, M, N estão sobre BC, AC, AB, respectivamente, e AL, BM, CN são concorrentes num ponto P.

a) Encontre o valor numérico de $\frac{PL}{AL} + \frac{PM}{BM} + \frac{PN}{CN}$.

b) Encontre o valor numérico de $\frac{AP}{AL} + \frac{BP}{BM} + \frac{CP}{CN}$.

6. (IBERO/1985) Se AD, BE, CF são cevianas concorrentes no circuncentro O do ΔABC, demonstre que $\frac{1}{AD} + \frac{1}{BE} + \frac{1}{CF} = \frac{2}{R}$. (Sugestão: Usar problema 5)

7. (BANCO IMO/1996) Seja ABC um triângulo acutângulo com circuncentro O e raio R. Seja $A_1 \neq O$ o ponto de interseção de AO com a circunferência circunscrita ao triângulo BOC e defina analogamente B_1 e C_1. Mostre que $OA_1 \cdot OB_1 \cdot OC_1 \geq 8R^3$. Quando ocorre a igualdade?

8. Em um $\triangle ABC$, AD, BE, CF são concorrentes no ponto P tal que AP=PD=6, EP=3, PB=9 e CF=20. Qual é a área do $\triangle ABC$?