# Semana Olímpica 2011
# Funções Geratrizes

Samuel Feitosa

**Problema 1.** *Um candidato presta um exame de 4 provas. Cada prova tem no máximo m pontos. Mostre que número de maneiras de se obter um total de 2m pontos é* $\dfrac{(m+1)(2m^2+4m+3)}{3}$

**Problema 2.** *Seja n um inteiro positivo. Encontre o número de polinômios* $p(x)$ *com coeficientes em* $\{0,1,2,3\}$ *tais que* $p(2)=n$.

**Problema 3.** *Prove que o conjunto de sequências* $0-1$ *de comprimento n que contém exatamente m ocorrências de* $0-1$ *é* $\binom{n+1}{2m+1}$

**Problema 4.** *Para quais valores de* $n \geq 1$ *existe um número m que pode ser escrito na forma* $a_1+a_2+\ldots+a_n$*(com* $a_1 \in \{1\}, a_2 \in \{1,2\}, \ldots, a_n \in \{1,2,\ldots,n\}$ *em* $(n-1)!$ *ou mais maneiras?*

**Problema 5.** *Um triminõ é um retêngulo* $3\times 1$*. um monominó é um único quadrado. Determine o numero de maneiras de se cobrir um tabuleiro* $8\times 8$ *usando 21 triminós e 1 monominó.*

**Problema 6.** *Sejam m e n inteiros positivos. Suponha que um dado retângulo pode ser coberto por uma combinação de peças horizontais* $1\times m$ *e peças verticais* $n\times 1$*. Prove que ele pode ser coberto usando somente um dos dois tipos.*

**Problema 7.** *Encontre o número de subconjuntos de* $\{1,2,3\ldots,2000\}$ *tal que a soma dos elementos é divisível por 5.*

**Problema 8.** *A sequência finita* $a_1,a_2,\ldots,a_n$ *é chamada p-balanceada se qualquer soma da forma* $a_k+a_{k+p}+a_{k+2p}+\ldots$ *é a mesma para qualquer* $k=1,2,\ldots,p$*. Prove que se a sequência com 50 membros é p-balanceada para* $p=3,5,7,11,13,17$ *então todos estes números são iguais a zero.*

**Problema 9.** *Para um dado inteiro* $n>1$*, duas n-uplas distintas de inteiros* $(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ *e* $(b_1,b_2,\ldots,b_n)$ *tais que as sequências de somas*

$$a_1+a_2, a_1+a_3, \ldots, a_{n-1}+a_n$$

*e*

$$b_1+b_2, b_1+b_3, \ldots, b_{n-1}+b_n$$

*coincidem a menos de uma permutação. Mostre que n é uma potência de* 2.

**Problema 10.** *(Putnam 2000) Seja* $S_0$ *um conjunto finito de inteiros positivos. Definimos os conjuntos* $S_1,S_2,\ldots$ *de inteiros positivos como segue: o inteiro a está em* $S_{n+1}$ *se, e somente se, extamente um dentre* $a-1$ *ou a está em* $S_n$*. Mostre que existem infinitos inteiros N para os quais*

$$S_N = S_0 \cup \{N+a : a \in S_0\}.$$

**Problema 11.** *Sejam* $A_1,A_2,\ldots,B_1,B_2,\ldots$ *conjuntos tais que* $A_1=\emptyset$, $B_1=\{0\}$, $A_{n+1}=\{x+1|x\in B_n\}$, $B_{n+1}=A_n\cup B_n - A_n\cap B_n$ *para todo inteiro positivo n. Determine todos os inteiros positivos n tais que* $B_n=\{0\}$.

**Problema 12.** *Para cada número n, seja* $f(n)$ *a quantidade de maneiras que se pode expressar n como soma de números iguais a* $1,3$ *ou* $4$*. Por exemplo,* $f(4)=4$*, pois todas as maneiras possíveis são* $4=1+1+1+1, 4=1+3, 4=3+1, 4=4$*. Demonstrar que se n é par,* $f(n)$ *é um quadrado perfeito.*

**Problema 13.** *Sejam* $a_0, a_1, \ldots$ *uma sequência crescente de inteiros não negativos tais que todo inteiro não negativo pode ser expresso unicamente na forma* $a_i + 2a_j + 4a_k$ *onde* $i, j$ *e* $k$ *são não necessariamente distintos. Determine* $a_{1998}$.

**Problema 14.** *Sejam* $O(n)$ *e* $E(n)$ *respectivamente as partições de* $n$ *em uma quantidade ímpar e par de inteiros positivos.* $DO(n)$ *denota o número de partições de* $n$ *em que todas as partes são ímpares distintos. Mostre que* $|O(n) - E(n)| = DO(n)$.

**Problema 15.** *Seja* $p$ *um primo ímpar. Encontre o número de subconjuntos* $A$ *do conjunto* $\{1, 2, 3, \ldots, 2p\}$, *tais que:*

1. *$A$ tem exatamente $p$ elementos*
2. *A soma de todos os elementos de $A$ é divisível por $p$.*

**Problema 16.** *Seja* $H_1$ *um polígono de* $p$ *lados, sendo* $p$ *primo. A sequência de polígonos* $H_1, H_2, \ldots H_p$ *é construída da seguinte maneira: dado o polígono* $H_k$, $H_{k+1}$ *é obtido refletindo cada vértice de* $H_k$ *em relação ao seu k-ésimo vértice vizinho, contando no sentido anti-horário. Prove que* $H_1$ *e* $H_p$ *são polígonos semelhantes.*

**Problema 17.** *Prove que o número de partições de* $n$ *com uma única parte menor (ela ocorre uma única vez) e parte maior no máximo duas vezes a parte menor é igual ao número de partições de* $n$ *em que a maior parte é ímpar e a menor parte é maior do que metade da parte maior.*

**Problema 18.** *Mostre que o número total de 1's nas partições de* $n$ *é igual à soma dos números de partes distintas em cada partição de* $n$.

**Problema 19.** *Prove que o número de partições de* $n$ *em que apenas as partes ímpares podem ser repetidas é igual ao número de partições de* $n$ *em que nenhuma parte aparece mais do que três vezes.*

**Problema 20.** *Seja* $p$ *um primo ímpar. Encontre o número de subconjuntos de* $\{1, 2, \ldots, p\}$ *com a soma de seus elementos divisível por* $p$.

**Problema 21.** *O número de partições de* $n$ *em que cada parte aparece ou 2,3 ou 5 vezes é o mesmo número de partições de* $n$ *em que cada parte pertence ao conjunto*

$$P = \{n \in \mathbb{N} | n \equiv 2, 3, 6, 9, 10 \pmod{12}\}.$$