Sequências (Convergência, Monotonicidade) – Nível U –

Marcelo Mendes de Oliveira
marcelom@ceara.net

Semana Olímpica – Janeiro/2003 – Goiânia

Teoremas

T1. Toda seqüência convergente é limitada.
T2. Toda seqüência monótona limitada é convergente.
T3. Sejam $x_n \le z_n \le y_n$ para todo $n \in \mathbf{N}$. Se $\lim x_n = \lim y_n = a$, então $\lim z_n$ existe e $\lim z_n = a$.
(*para demonstrações, veja [1])*

Problemas

01. A seqüência $\{x_n\}$ é definida por $x_0=0$, $x_{n+1}=\sqrt{4+3x_n}$. Mostre que $\{x_n\}$ é convergente e encontre seu limite.

02. (Vietnã/1991) É dada uma seqüência de números reais positivos $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots$ definida por $x_1=1$, $x_2=9$, $x_3=9$, $x_4=1$, e, para $n\ge1$,

$$x_{n+4} = \sqrt[n]{x_n x_{n+1} x_{n+2} x_{n+3}} .$$

Prove que essa seqüência é convergente e encontre seu limite.

03. (Romênia/1998) Seja $(a_n)_{n\ge1}$ uma seqüência de números reais tais que a seqüência $x_n=\sum_{k=1}^{n} a_k^2$ seja convergente e a seqüência $y_n=\sum_{k=1}^{n} a_k$ seja ilimitada. Prove que a seqüência $(b_n)_{n\ge1}$,

$$b_n=y_n-\lfloor y_n \rfloor$$

é divergente, onde $\lfloor y_n \rfloor$ é a parte inteira de y_n.

04. (Holanda/1990) Os números $a_1, a_2, a_3, \ldots$ são definidos como segue:

$$a_1=\frac{3}{2} \text{ e } a_{n+1}=\frac{3a_n^2+4a_n-3}{4a_n^2}.$$

a) Prove que para todo n ocorre: $a_n>1$ e $a_{n+1}<a_n$.
b) De a), segue que $\lim_{n\to\infty} a_n$ existe. Determine esse limite.
c) Determine $\lim_{n\to\infty} a_1 a_2 \ldots a_n$.

05. (Bielo-Rússia/1998) Existe uma seqüência infinita de números reais positivos $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ satisfazendo

$$x_{n+2} = \sqrt{x_{n+1}} - \sqrt{x_n}$$

para qualquer $n\ge1$?

06. Existe α, $0<\alpha<1$, tal que há uma seqüência $\{a_n\}_{n\in N}$ de números positivos com

$$1+a_{n+1} \le a_n+\frac{\alpha}{n}a_n ,\ \forall n\ge1?$$

07. Sejam a e b números reais tais que $0<b<a$. A seqüência é definida por

$$x_1=b,\ x_{n+1}=2x_n-\frac{x_n^2}{a}\ (n\ge1).$$

Demonstrar que $\{x_n\}$ é monótona e limitada.

08. (Holanda/1993) Uma seqüência de números é definida como segue: $u_1=a$, $u_2=b$, e para $n\ge2$

$$u_{n+1}=\frac{1}{2}(u_n+u_{n-1}).$$

Prove que existe $\lim_{n\to\infty} u_n$ existe e expresse o valor do limite em termos de a e b.

09. Iniciando com um número positivo $x_0=a$, seja $\{x_n\}_{n\ge0}$ uma seqüência de números tais que

$$x_{n+1}=\begin{cases} x_n^2+1, & \text{se n é par} \\ \sqrt{x_n}-1, & \text{se n é ímpar} \end{cases}.$$

Para quais números positivos a existirá termos dessa seqüência arbitrariamente próximos de 0?

Bibliografia

[1] Lima, E. Curso de Análise, vol. 1. Rio de Janeiro, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq, 1976.
[2] Gilbert, G. et al. The Wohascum County Problem Book. MAA, 1992.
[3] Engel, Arthur. Problem-solving strategies. New York, Springer-Verlag, 1998.