Cone Sul: do sonho à realidade

Yuri Lima

18 de janeiro de 2011

Resumo

Parece um sonho, daqueles bem distantes. Mas ir para a Cone Sul depende, basicamente, de você. Estudo, dedicação, disciplina e criatividade fazem o sonho virar realidade.

1 O que Estudar?

• Álgebra.

Manipulações algébricas: fatorações, somas telescópicas. Equações do 1° e 2° graus. Sistemas de equações. Conjuntos e funções. Seqüências. Desigualdades das médias, de Cauchy e do Rearranjo.

Referências: [4], [6], [8].

• Combinatória.

Permutações e combinações. Princípio da casa dos pombos. Indução. Princípio extremo. Invariantes. Paridade. Tabuleiro e pinturas. Contagem dupla e bijeção. Noção de grafos. Seqüência de Fibonacci.

Referências: [2], [4], [5], [6], [8].

• Geometria.

Perpendicularidade e paralelismo. Congruência e semelhança de triângulos. Proporção. Teorema de Pitágoras. Propriedades dos círculos: ângulos, potência de ponto, eixo radical. Áreas. Quadriláteros cíclicos. Pontos notáveis do triângulo: baricentro, circuncentro, incentro e ortocentro. Lugar geométrico. Concorrência e colinearidade: teoremas de Menelaus e Ceva. Noção de geometria projetiva. Geometria com contas. Transformações geométricas: homotetia, rotação e translação.

Referências: [3], [4], [7], [11], [12].

• Teoria dos Números.

Divisibilidade. Números primos. Congruência. Teoremas de Euler, Fermat e Wilson. Teorema Chinês dos Restos. Equações diofantinas. Equação de Pell. Ordem. Noção de resíduos quadráticos e raízes primitivas.

Referências: [4], [5], [6], [8], [9], [10].

2 Dedicação e Disciplina

O domínio da matemática requer um longo tempo de estudo e concentração, razão pela qual dedicação e disciplina são as características mais importante de um olímpico que visa as competições internacionais.

Reserve um tempo do dia para estudo de teoria e outro para pensar em problemas. E não se esqueça do

CADERNÃO

onde são escritas as soluções dos problemas. O cadernão tem duas funções principais:

1. Ter um local de referência de problemas e suas soluções.
2. Praticar a escrita.

É extremamente importante saber explicar bem a solução, pois de nada adianta resolver um problema e não saber explicá-lo de maneira clara. Grande parte dos pontos perdidos em competições vêm das falhas na escrita, em particular da incapacidade de explanações claras. Não poupe palavras nem espaço! Opte pelo bom entendimento!

3 Criatividade

Vamos ao que interessa.

Problema 1. (Teste IMO Brasil 2002) Sejam $a_1, a_2, \ldots, a_n$ números reais tais que

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n \geq n^2 \quad \text{e} \quad a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 \leq n^3 + 1.$$

Prove que $n-1 \leq a_k \leq n+1$ para todo $k = 1, 2, \ldots, n$.

Problema 2. (Cone Sul 2000) No plano cartesiano, considere os pontos de coordenadas inteiras. Uma operação consiste em escolher um destes pontos e realizar uma rotação de 90° no sentido anti-horário, com centro neste ponto. É possível, através de uma seqüência dessas operações, levar o triângulo de vértices $(0,0)$, $(1,0)$ e $(0,1)$ no triângulo de vértices $(0,0)$, $(1,0)$ e $(1,1)$?

Problema 3. (Rioplatense 2000) Considere um triângulo ABC tal que os ângulos A e B sejam agudos. As bissetrizes internas dos ângulos A e B cortam BC e AC em M e N, respectivamente. Sejam P e Q pontos sobre o lado AB tais que $MP \perp AB$ e $NQ \perp AB$.

Sabendo que $\angle ACB \geq 2 \cdot \angle PCQ$, calcule o valor de $\angle ACB$.

Problema 4. (Cone Sul 2003) Demonstrar que existe uma seqüência de inteiros positivos $x_1, x_2, \ldots$ que:

(i) contém exatamente uma vez cada um dos inteiros positivos, e

(ii) para cada n, a soma parcial $x_1 + x_2 + \cdots + x_n$ é divisível por n^n.

Referências

[1] Caminha, A., Mendes, M., Rodrigues, P. *Olimpíadas de Matemática do Cone Sul V a XII*, Editora Papel Virtual (2002).

[2] Carvalho, J., Carvalho, P., Morgado, A., Fernandez, P. *Análise Combinatória e Probabilidade*, SBM (1991).

[3] Coxeter, H., Greitzer, S. *Geometry Revisited*, Mathematical Association of America (1967).

[4] Engel, A. *Problem-Solving Strategies*, Springer-Verlag (1997).

[5] Fomin, D., Genkin, S., Itenberg, I. *Mathematical Circles*, American Mathematical Society (1966).

[6] Larson, L. *Problem Solving Through Problems*, Springer-Verlag (1983).

[7] Lima, Y. *Potência de Ponto, Eixo Radical, Centro Radical e Aplicações.* Disponível em http://www.obm.org.br/ 7semana.htm.

[8] Lozansky, E., Rousseau, C. *Winning Solutions*, Springer-Verlag (1996).

[9] Montgomery, H., Niven, I., Zuckerman, Z. *An Introduction to the Theory of Numbers*, Hardcover (1991).

[10] Oliveira, J. *Introdução à Teoria dos Números*, IMPA (2000).

[11] Shine, C. *Geometria com contas*, Revista Eureka!, volume 17 (2003).

[12] Yaglom, I. *Geometric transformations*, volumes 1, 2 e 3, New Mathematical Library (1962).