# Teorema de Sarkovsky

Yuri Lima

8 de janeiro de 2008

## Resumo

Provaremos um teorema, provado pelo matemático ucraniano A. Sarkovsky em [4] que, em poucas palavras, afirma que Período 3 implica Caos, no seguinte sentido: se uma função contínua definida num intervalo compacto da reta nele mesmo tem um ponto de período 3, então ela possui pontos de todos os períodos. Citaremos, ainda, uma generalização do teorema acima, introduzindo uma ordem não-trivial nos inteiros positivos, chamada ordem de Sarkovsky.

## 1 Introdução

Surpreendentemente, o único resultado de análise necessário é o

**Teorema 1.** (do Valor Intermediário) Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua tal que

$$f(a) = c \quad \text{e} \quad f(b) = d.$$

Dado $y \in [c, d]$, existe $x \in [a, b]$ tal que

$$f(x) = y.$$

**Prova.** Toda função contínua leva conjuntos conexos em conjuntos conexos. Relembrando que os conexos da reta são os intervalos, $f([a, b])$ é um intervalo compacto que contém $c, d$ e portanto

$$f([a, b]) \supseteq [c, d].$$

■

O restante da prova utiliza argumentos combinatórios baseados na construção de um grafo, que será feita na próxima seção. Antes, vamos obter algumas conseqüências do Teorema 1. Daqui em diante, $I$ denotará o intervalo $[0, 1]$.

**Definição 1.** Dada uma função $f : I \to I$, denotamos

$$\text{Fix}(f) = \{x \in I \mid f(x) = x\}$$

o conjunto dos pontos fixos de $f$ e, para cada $n \geq 1$,

$$\text{Per}_n(f) = \{x \in \text{Fix}(f^n) \mid n \text{ é o menor natural } d \text{ tal que } f^d(x) = x\}$$

o conjunto dos pontos de período $n$.

**Proposição 1.** Se $f : I \to I$ é contínua, então

$$\text{Fix}(f) \neq \emptyset.$$

**Prova.** A função $g(x) = f(x) - x$ satisfaz

$$g(0) \geq 0 \quad \text{e} \quad g(1) \leq 0.$$

Pelo Teorema 1, existe $x \in I$ tal que $g(x) = 0$, isto é, $x \in \text{Fix}(f)$. ■

**Proposição 2.** Seja $f : I \to I$ contínua. Se $J \subseteq I$ é um intervalo fechado tal que $f(J) \supseteq J$, então

$$\text{Fix}(f|_J) \neq \emptyset.$$

**Prova.** Seja $J = [a, b]$. Por hipótese, existem $c, d \in [a, b]$ tais que $f(c) = a$ e $f(d) = b$. Daí, $g(x) = f(x) - x$ satisfaz

$$g(c) = a - c \leq 0 \quad \text{e} \quad g(d) = b - d \geq 0,$$

o que conclui a prova. ■

**Proposição 3.** Sejam $f : I \to I$ uma função contínua e $I_1, \dots, I_n \subseteq I$ intervalos fechados tais que

$$\begin{aligned} f(I_1) &\supseteq I_2 \\ f(I_2) &\supseteq I_3 \\ &\vdots \\ f(I_n) &\supseteq I_1. \end{aligned}$$

Então existe $x \in \text{Fix}(f^n)$ tal que

$$f^i(x) \in I_{i+1}, \quad i = 0, 1, \dots, n-1.$$

**Prova.** Necessitamos do

**Lema 1.** Se $J_1, J_2 \subseteq I$ são intervalos fechados tais que $f(J_1) \supseteq J_2$, então existe um intervalo fechado $J \subseteq J_1$ tal que

$$f(J) = J_2.$$

**Demonstração.** Sejam $J_1 = [a, b]$ e $J_2 = [c, d]$. Pelo Teorema 1, existem $a', b' \in J_1$ tais que $f(a') = c$ e $f(b') = d$. Logo, podemos supor que $\{f(a), f(b)\} = \{c, d\}$. Defina

$$\begin{aligned} a_0 &= \max\{x \in [a, b] \,|\, f(x) = f(a)\} \\ b_0 &= \min\{x \in [a_0, b] \,|\, f(x) = f(b)\}. \end{aligned}$$

Afirmamos que $f([a_0, b_0]) = [c, d]$. A inclusão $\supseteq$ é óbvia. Para a outra, temos dois casos.

I. $f(a) = c$ e $f(b) = d$: tome $x \in (a_0, b_0)$. Se $f(x) < c$, existe $x' \in (x, b)$ tal que $f(x') = c$, contrariando a maximalidade de $a_0$. Se $f(x) > d$, existe $x' \in (a_0, x)$ tal que $f(x') = d$, novamente um absurdo. Logo, $f(x) \in [c, d]$.

II. $f(a) = d$ e $f(b) = c$: tome $x \in (a_0, b_0)$. Se $f(x) < c$, existe $x' \in (a_0, x)$ tal que $f(x') = c$, absurdo. Se $f(x) > d$, existe $x' \in (x, b)$ tal que $f(x') = d$, absurdo. ■

Pelo Lema 1, existe $J_1 \subseteq I_1$ tal que $f(J_1) = I_2$. Então

$$f^2(J_1) = f(I_2) \supseteq I_3 \implies f^2(J_1) \supseteq I_3.$$

Novamente pelo Lema 1, existe $J_2 \subseteq J_1$ tal que $f^2(J_2) = I_3$. Por indução, construímos $J_1, \dots, J_n$ tais que

$$J_n \subseteq \cdots \subseteq J_2 \subseteq J_1 \subseteq I_1$$

e

$$f^i(J_i) = I_{i+1}, \quad i = 1, \dots, n,$$

onde $I_{n+1} = I_1$. Assim,

$$f^n(J_n) = I_1 \supseteq J_n \implies \exists\, x \in \text{Fix}(f^n|_{J_n}).$$

Além disso, como

$$f^i(J_n) \subseteq f^i(J_i) = I_{i+1},$$

temos $f^i(x) \in I_{i+1}$. ■

Vale comentar as hipóteses e conclusão da Proposição anterior. Ao considerarmos o comportamento dos intervalos $I_1, \dots, I_n$, estamos discretizando a dinâmica de $f$, inicialmente contínua, nas regiões de interesse. A hipótese diz que se a discretização for um ciclo de tamanho $n$, então algum ponto tem seus iterados em $I_1, \dots, I_n$ e, além disso, é fixo de $f^n$. Baseados nessas observações é que desenvolvemos a ferramenta da próxima seção.

**Comentários.** Em termos de Sistemas Dinâmicos, a Proposição 3 é um Closing Lemma.

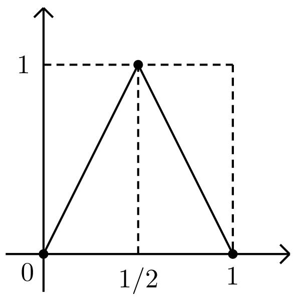
# 2 Discretizando a Dinâmica

Sejam $f : I \to I$ contínua e $I_1, \dots, I_n \subseteq I$ intervalos fechados. O *grafo de Markov* associado à função $f$ e aos intervalos $I_1, \dots, I_n$ é um grafo $G = (V, E)$ tal que

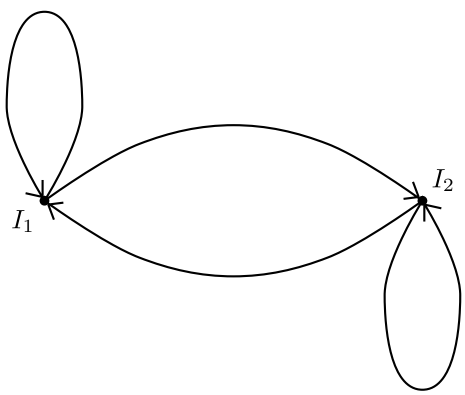
$$\begin{aligned} V &= \{I_1, \dots, I_n\} \\ E &= \{I_j \longrightarrow I_k \,|\, f(I_j) \supseteq I_k\}. \end{aligned}$$

**Exemplo.** Seja $f : I \to I$ dada por

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x \quad\;\;\, , \; x \le 1/2 \\ &\phantom{=}\; 2 - 2x \, , \; x \ge 1/2. \end{aligned}$$




Considere $I_1 = [0, 1/2]$ e $I_2 = [1/2, 1]$. Como $f(I_1), f(I_2) = I$, o grafo de Markov tem a seguinte estrutura




Em termos do grafo de Markov, a Proposição 3 pode ser reescrita como:

"Se

$$I_1 \longrightarrow I_2 \longrightarrow \cdots \longrightarrow I_n \longrightarrow I_1$$

é ciclo de um grafo de Markov, então existe $x \in \mathrm{Fix}(f^n)$ tal que

$$f^i(x) \in I_{i+1}, \quad i = 0, 1, \ldots, n-1."$$

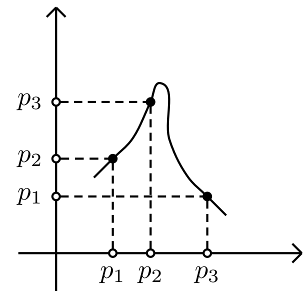
Desenvolvidas as ferramentas, vamos à prova do teorema de interesse.

**Teorema 2.** (Período 3 implica Caos) Seja $f : I \to I$ uma função contínua que possui um ponto de período 3. Então $f$ possui pontos de todos os períodos.

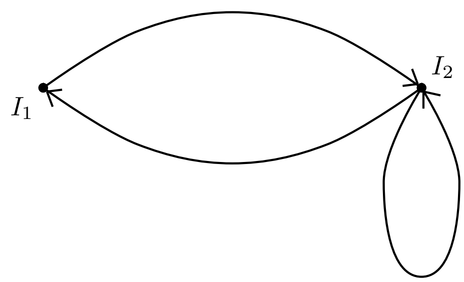
**Prova.** Seja $p_1 \in I$ tal que

$$\begin{aligned} f(p_1) &= p_2 \\ f(p_2) &= p_3 \\ f(p_3) &= p_1, \end{aligned}$$

com $p_1 \neq p_2 \neq p_3 \neq p_1$ e $p_1 < p_2, p_3$. Vamos supor que $p_1 < p_2 < p_3$. O caso $p_1 < p_3 < p_2$ é tratado de maneira análoga.




Sejam $I_1 = [p_1, p_2]$ e $I_2 = [p_2, p_3]$. O grafo de Markov associado a esses intervalos é




A existência do loop em $I_2$ permitirá a construção de ciclos de tamanho arbitrário.

Seja $n > 1$ inteiro. Queremos mostrar que

$$\mathrm{Per}_n(f) \neq \emptyset.$$

Temos dois casos:

I. $n = 2$: considere o ciclo

$$I_1 \longrightarrow I_2 \longrightarrow I_1.$$

Da Proposição 3, existe $x \in I_1$ tal que

$$f(x) \in I_2 \quad \text{e} \quad f^2(x) = x.$$

Como $I_1 \cap I_2 = \{p_2\}$, segue que $f(x) \neq x$ e portanto $x \in \mathrm{Per}_2(f)$.

II. $n > 3$: considere o ciclo de tamanho $n$

$$\underbrace{I_2 \to I_2 \to \cdots \to I_2}_{n-2 \text{ setas}} \to I_1 \to I_2.$$

Novamente pela Proposição 3, existe $x \in I_2$ tal que

$$\begin{aligned} f(x), \ldots, f^{n-2}(x) &\in I_2 && (1)\\ f^{n-1}(x) &\in I_1 && (2)\\ f^n(x) &= x. && (3) \end{aligned}$$

Se $x \notin \mathrm{Per}_n(f)$, então $x \in \mathrm{Per}_d(f)$, para algum divisor próprio $d$ de $n$. Como

$$0 \leq d - 1 < \frac{n}{2} \leq n - 2\,,$$

temos

$$f^{n-1} = f^{d-1}(x) \in I_2. \tag{4}$$

Das relações (2) e (4), segue que

$$\begin{aligned} & f^{n-1}(x) = p_2 \\ \Longrightarrow\quad & x = p_3 \\ \Longrightarrow\quad & f(x) = p_1 \notin I_2\,, \end{aligned}$$

contrariando (2). Isso conclui a prova. ■

# 3 Uma Generalização

Considere a ordem total $\succ$ dos inteiros positivos definida por

$$3 \succ 5 \succ 7 \succ \cdots \succ 2 \cdot 3 \succ 2 \cdot 5 \succ 2 \cdot 7 \succ \cdots \succ$$

$$\succ 2^k \cdot 3 \succ 2^k \cdot 5 \succ \cdots \succ 2^{k+1} \succ 2^k \succ \cdots \succ 2 \succ 1.$$

**Teorema 3.** (Sarkovsky) Seja $f : I \to I$ uma função contínua. Se $f$ possui um ponto de período $n$ e $n \succ m$, então $f$ possui um ponto de período $m$.

Obviamente, o Teorema 2 decorre do acima, uma vez que 3 é o maior dos números na ordem $\succ$. Além disso, esse é o melhor resultado possível, uma vez que é possível construir funções que têm pontos de período $m$ mas não têm pontos de período $n$, para todo $n \succ m$.

Seja $p_1 \in \mathrm{Per}_n(f)$, com órbita

$$\mathcal{O} = \{p_1 < p_2 < \cdots < p_n\}.$$

A prova do Teorema de Sarkovsky se baseia na análise das propriedades do grafo de Markov $G$ associado aos $n-1$ intervalos $[p_i, p_{i+1}]$, $i = 1, \ldots, n-1$. Vejamos algumas delas.

**Lema 2.** Existe um intervalo $[p_i, p_{i+1}]$, o qual chamaremos de $I_1$, para o qual a aresta $I_1 \longrightarrow I_1$ está em $G$.

**Demonstração.** Temos $f(p_1) \in \mathcal{O} - \{p_1\}$ e $f(p_n) \in \mathcal{O} - \{p_n\}$. Em particular,

$$f(p_1) > p_1 \quad \text{e} \quad f(p_n) < p_n.$$

Sejam

$$p_a = \max\{p_i \mid f(p_i) > p_i\} \quad \text{e} \quad I_1 = [p_a, p_{a+1}].$$

Então

$$f(p_a) \geq p_{a+1} \quad \text{e} \quad f(p_{a+1}) \leq p_a,$$

de modo que $f(I_1) \supseteq I_1$. ■

**Lema 3.** É possível chegar a qualquer vértice de $G$ partindo de $I_1$.

**Prova.** Essa é uma das provas mais belas do artigo. Seja $V_i$ o conjunto dos intervalos $I_1, I_2, \ldots, I_{n-1}$ para os quais é possível chegar, partindo de $I_1$, por um caminho de tamanho $i$ e

$$U_i = \bigcup_{I_j \in V_i} I_j \subseteq I.$$

Vamos mostrar que $U_i = [p_1, p_n]$ para $i$ suficientemente grande. Valem as inclusões

$$\emptyset \neq V_i \subseteq V_{i+1} \quad \text{e} \quad \emptyset \neq U_i \subseteq U_{i+1},$$

pois a cada caminho $C$ de tamanho $i$ podemos associar um caminho de tamanho $i+1$, adjuntando o laço $I_1 \longrightarrow I_1$ ao início de $C$.

Em quais condições $V_i \neq V_{i+1}$, isto é, em quais condições existe $I_k \in V_{i+1} \backslash V_i$? Se existir $I_j \in V_i$ tal que $f(\partial I_j) \not\subseteq U_i$, isso ocorre. De fato, existirá um intervalo $I_k \notin V_i$ tal que $f(I_j) \supseteq I_k$. Adjuntando a aresta $I_j \longrightarrow I_k$ ao caminho de tamanho $i$ ligando $I_1$ a $I_j$, concluímos que $I_k \in V_{i+1}$.

Com isso, quando a seqüência $(V_i)$ se estabiliza, digamos $V_i = V_{i+1} = \cdots$, temos

$$f(U_i \cap \mathcal{O}) \subseteq U_i \quad \Longrightarrow \quad f(U_i \cap \mathcal{O}) = U_i \cap \mathcal{O}.$$

Como o único subconjunto de $\mathcal{O}$ estável por $f$ é ele mesmo, obtemos a igualdade

$$U_i \cap \mathcal{O} = \mathcal{O} \quad \Longrightarrow \quad U_i = [p_1, p_n].$$

■

**Lema 4.** Suponha que não exista um caminho em $G$ ligando $I_j$ a $I_1$, para todo $j > 1$. Então $n$ é par, $f$ possui um ponto de período 2 e leva os elementos de $\mathcal{O}$ à esquerda de $I_1$ nos elementos de $\mathcal{O}$ à direita de $I_1$ bijetivamente.

**Prova.** Vamos mostrar a última afirmação. As outras seguirão dessa. Sabemos, pelo Lema 2, que $I_1 = [p_a, p_{a+1}]$, onde $p_a = \max\{p_i \,|\, f(p_i) > p_i\}$. Suponha, por absurdo, que exista $i$ tal que $f(p_i) \leq p_a$, $1 \leq i < a$. Seja $i$ o maior desses índices. Temos $f(p_i) \leq p_a$ e $f(p_{i+1}) \geq p_{a+1}$ e portanto a aresta $[p_i, p_{i+1}] \longrightarrow I_1$ está em $G$, contradizendo a hipótese. Isso prova a primeira e terceira afirmações.

Para o que falta, sejam $J_1 = [p_1, p_a]$ e $J_2 = [p_{a+1}, p_n]$. Temos

$$f(J_1) = J_2 \quad \text{e} \quad f(J_2) = J_1 \quad \Longrightarrow \quad f^2(J_1) = J_1,$$

implicando que existe $p \in J_1$ tal que

$$f^2(p) = p.$$

Como $f(p) \in J_2$ e $J_1 \cap J_2 = \emptyset$, segue que $p$ tem período 2. ■

Suponha que $f$ possua um ponto de período ímpar. Sejam $n$ o menor desses valores e $p \in \mathrm{Per}_n(f)$. O grafo de Markov associado a $p$, que contém $n-1$ vértices, tem algumas particularidades.

**Lema 5.** Nas condições acima, $G$ satisfaz simultaneamente:

(a) Existe um ciclo de tamanho $n-1$

$$I_1 \longrightarrow I_2 \longrightarrow \cdots \longrightarrow I_{n-1} \longrightarrow I_1.$$

(b) Nenhuma aresta $I_j \longrightarrow I_{j+k}$, $j \geq 1$ e $k > 1$, está em $G$.

(c) Toda aresta $I_{n-1} \longrightarrow I_j$, $j < n$ ímpar, está em $G$.

**Prova.** (a) Sabemos que se $G$ possui um ciclo, então ele possui ciclos de tamanho arbitrariamente grande, devido ao loop $I_1 \longrightarrow I_1$. Em princípio, esperaríamos criar o ciclo de tamanho $n-1$ provando alguma propriedade maximal, mas a observação acima diz que isso não é possível. Considere, então, o ciclo de menor tamanho contendo $I_1$ e pelo menos outro vértice diferente de $I_1$, digamos

$$I_1 \longrightarrow I_2 \longrightarrow \cdots \longrightarrow I_k \longrightarrow I_1, \quad k \leq n-1.$$

Tal ciclo existe, pois, como $n$ é ímpar, o Lema 4 garante a existência de um caminho ligando algum vértice $I_j$, $j \neq 1$, a $I_1$ e, pelo Lema 3, $I_1$ também se liga a $I_j$. Por absurdo, suponha $k < n-1$.

Note que $k$ não é ímpar, pois senão $f$ possuiria um ponto de período ímpar $k < n$. Por outro lado, $k$ também não é par, pois o ciclo

$$I_1 \longrightarrow I_1 \longrightarrow I_2 \longrightarrow \cdots \longrightarrow I_k \longrightarrow I_1$$

garantiria a existência de um ponto de período ímpar $k+1 < n$, novamente um absurdo. Assim, $k = n-1$.

(b) Decorre de (a), pois o ciclo tem tamanho mínimo.

(c) Por (b), de $I_1$ partem apenas duas arestas:

$$I_1 \longrightarrow I_1 \quad \text{e} \quad I_1 \longrightarrow I_2.$$

Daí, se $f(p_a) = p_i$ e $f(p_{a+1}) = p_j$, então $|i - j| = 2$. Como $i \geq a + 1$ e $j \leq a$, temos dois casos:

I. $i = a + 1$ e $j = a - 1$: temos $I_2 = [p_{a-1}, p_a]$. O grau de saída de $I_2$, pela minimalidade do ciclo e pelo item (b), é 1. Logo, $f(I_2)$ contém apenas $I_3$, donde $f(p_{a-1}) = p_a$ ou $p_{a+2}$. Como $I_1 \neq I_3$, temos $f(p_{a-1}) = p_{a+2}$ e daí $I_3 = [p_{a+1}, p_{a+2}]$. Por indução, se $I_j = [p_i, p_{i+1}]$, $j < n - 1$, o fato de $I_j \longrightarrow I_1$ não estar em $G$, as relações $f(p_i), f(p_{i+1}) \neq p_a$ e a alternância dos intervalos iniciais garantem que $I_1, I_2, \ldots, I_{n-1}$ estão distribuídos em simetria alternada em relação a $p_a$. Portanto, $f(p_2) = p_n$ e $f(p_1) = p_a$, provando que $f(I_{n-1}) \supseteq [p_a, p_n]$.

II. $i = a + 2$ e $j = a$: análogo ao anterior. ■

Encaminhamos o leitor interessado no restante da prova a [1]. Para os mais interessados, [3] contém uma compilação de provas simples do Teorema 3.

## Referências


[1] Briend, J-Y. *Le Théorème de Sarkovsky*, Le journal de maths des élèves, 1 (1995). Disponível em http://www.umpa.ens-lyon.fr/JME/Vol1Num3/BriendJME3/BriendJME3.html.

[2] de Melo, W., van Strien, S. *One-dimensional Dynamics*, Springer-Verlag (1993).

[3] Du, B-S. *A collection of simple proofs of Sarkovsky's theorem*. Disponível em http://arxiv.org/abs/math/0703592.

[4] Sarkovsky, A. *Coexistence of cycles of a continuous mapping of the line into itself*, Ukranian Math. Z., 16 (1964).