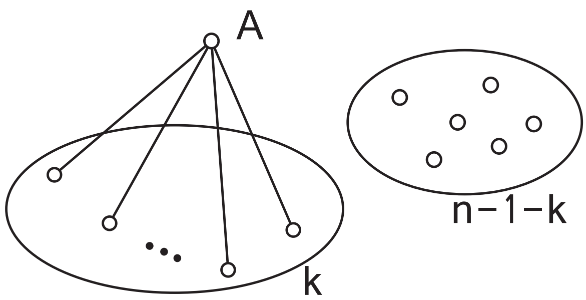
O TEOREMA DE TURÁN
SEMANA OLÍMPICA 2015

SAMUEL FEITOSA

Teorema 1. Um grafo de n vértices G com mais que $\lfloor n^2/4 \rfloor$ arestas possui um "triângulo".



Prova. Suponhamos que G não possui triângulo. Seja A o vértice de G com o maior grau, k digamos. Claramente os k vértices que estão ligados à A não podem estar ligados entre si. Assim, todas as arestas que não contém o vértice A devem conter pelo menos um vértice dos outros $n-k-1$ vértices que não estão ligados à A. Como cada um desses $n-k-1$ vértices possui grau no máximo k, G possui no máximo $k + k(n-k-1) = n^2/4 - (n/2-k)^2 \leq n^2/4$ arestas. □

Exite uma história curiosa sobre o teorema anterior . Reza a lenda que o grande matemático húngaro Paul Erdös perguntou para o joven Lois Posá a demonstação do teorema acima. Posá tinha 12 anos e conseguiu uma demonstração em menos de 6 horas! Vejamos algumas aplicações simples de nosso resultado:

Problema 1. [Rússia] Em um torneio nacional de futebol, participam 20 equipes. Qual é o número mínimo de partidas que deve ter o torneio para que, dentre quaisquer três equipes, haja duas que joguem entre si?

Prova. Represente cada time por um vértice e trace uma aresta entre dois times caso eles **não** joguem entre si. Não podemos ter um triângulo, logo o número de arestas traçadas é menor ou igual a $\lfloor 20^2/4 \rfloor = 100$. Então temos pelo menos $\binom{20}{2} - 100 = 90$ arestas não traçadas, ou seja, devemos ter pelo menos 90 jogos. Para construir um exemplo com 90 jogos, divida os dois times em dois grupos de 10 e em cada grupo realize todos os $\binom{10}{2} = 45$ jogos possíveis. □

Problema 2. Existem 21 pontos sobre um círculo. Prove que existem pelo menos 100 arcos definidos por esses 21 pontos, cujas medidas em graus são menores ou iguais a $120°$. (Dica: trace uma aresta entre A e B se $\angle AOB > 120°$)

Problema 3. [Hungria-Israel] Prove que se o número de arestas de um grafo G é maior ou igual a $n^2/4 + 2$ então G contém dois triângulos com exatamente um vértice em comum.

Problema 4. Seja G um grafo com 10 vértices e 26 arestas. Mostre que G deve ter pelo menos 5 triângulos.

Chamaremos de K_p, ou $p-$clique, um grafo completo de p vértices (i.e., um grafo com p vértices, onde todas as $\binom{p}{2}$ arestas possíveis estão traçadas). Então triângulos são $3-$cliques e a pergunta natural é se existe algum resultado semelhante ao teorema anterior para $p-$cliques. Suponha que $n = t(p-1) + r, 1 \leq r \leq p-1$. Divida os n vértices do grafo G em $p-1$ subconjuntos $S_1, S_2, \ldots, S_{p-1}$, com r deles de cardinalidade $t+1$ e $p-1-r$ de cardinalidade t. Em cada S_i não iremos traçar nenhuma aresta interna, mas todo vértice de S_i será ligado a todo vértice de S_j se $i \neq j$. Ao todo traçamos $\binom{n}{2} - \binom{t+1}{2}r - \binom{t}{2}(p-1-r)$ aretas. Substituindo $t = (n-r)/(p-1)$ obtemos:

$$\frac{n^2(p-2)}{2(p-1)} - \frac{r(p-1-r)}{2(p-1)} = M(n,p)$$

arestas. Veja que nosso grafo não contém um K_p.

Teorema 2. [Turán,1941] Se um grafo de n vértices contém mais que $M(n,p)$ arestas, então ele contém um K_p como subgrafo.

Prova. Faremos uma prova por indução sobre t. Para $t = 0$ o resultado é imediato, uma vez que $M(n,p) = \binom{n}{2}$ e $n < p$. Considere agora um grafo G, com n vértices, sem um K_p e com o número máximo de arestas. Claramente G contém um subgrafo K_{p-1}, digamos H, pois caso contrário poderíamos adicionar mais uma aresta a G e não teríamos um K_p. Cada um dos vértices restantes está ligado a no máximo $p-2$ vértices de H. Por outro lado, os $n-p+1$ vértices restantes não contêm um K_p como subgrafo. Como $n-p+1 = (t-1)(p-1)+r$, nós podemos aplicar a hipótese de indução a este conjunto de pontos. Então, o número de arestas de G é no máximo

$$M(n-p+1,p) + (n-p+1)(p-2) + \binom{p-1}{2} = M(n,p).$$

$\square$

Problema 5. Será que a cota estabelida por Turán é realmente boa? Use a demonstração anterior para mostrar que o número máximo de arestas em um grafo de n vértices sem K_p é atingido apenas em configurações como a que antecede a demonstração do teorema.

Problema 6. [IMO 2003] Seja A um subconjunto de 101 elementos do conjunto $S = \{1, 2, \ldots, 1000000\}$. Prove que existem números $t_1, t_2, \ldots, t_{100}$ em S tais que os conjuntos

$$A_j = \{x + t_j \mid x \in A\}, \qquad j = 1, 2, \ldots, 100$$

são disjuntos dois a dois.

Problema 7. [China 2005] Para n pessoas, é conhecido que:

a) entre quaisquer três pessoas existem duas que se conhecem, e

b) entre quaisquer quatro pessoas existem duas que se desconhecem.

Encontre o valor máximo de n. Assuma que a relação de conhecimento é simétrica.

Problema 8. [Polônia 1997] Dados quaisquer n pontos sobre um círculo unitário, mostre que no máximo $\dfrac{n^2}{3}$ segmentos ligando pares de pontos tem comprimento maior que $\sqrt{2}$. (Dica: trace uma aresta entre dois pontos se o segmento entre eles é maior que $\sqrt{2}$. Use a desgualdade de Ptolomeu para mostrar que não pode existir um K_4).

Problema 9. [OBM 2005] Temos quatro baterias carregadas, quatro baterias descarregadas e um rádio que necessita de duas baterias carregadas para funcionar. Supondo que não sabemos quais baterias estão carregadas e quais estão descarregadas, determine o menor número de tentativas suficiente para garantirmos que o rádio funcione. Uma tentativa consiste em colocar duas das baterias no rádio e verificar se ele, então, funciona.

Problema 10. [Japão 1997] Seja G um grafo com 9 vértices. Suponha que, dados quaisquer 5 vértices de G, existem pelo menos duas arestas com ambas as extremidades dentre esses 5 vértices. Qual é o menor número possível de arestas em G?

Problema 11. [USA, TST 2002] Seja n um inteiro positivo e seja S um conjunto de 2^{n+1} elementos. Seja f uma função do conjunto de subconjuntos de dois elementos de S em $\{0, 1, \ldots, 2^{n-1} - 1\}$. Assuma que, para quaisquer elementos x, y, z de S, um dentre $f(\{x,y\}), f(\{y,z\}), f(\{z,x\})$ é igual à soma dos outros dois. Mostre que existem a, b, c em S tais que $f(\{a,b\}), f(\{b,c\}), f(\{c,a\})$ são todos iguais a 0.

Problema 12. Sejam $x_1, x_2, \ldots, x_n$ números reais distintos. Prove que $\#\{(i,j) | 1 < |x_i - x_j| < 2\} \leq n^2/4$

Problema 13. [USAMO 1995] Suponha que em uma certa sociedade cada par de pessoas pode ser classificada como amigável ou hostil. Membros de pares amigáveis são chamados de amigos e membros de pares hostis são chamados de adversários. Suponha que a sociedade tenha n pessoas, q pares amigáveis e que pelo menos um par em qualquer conjunto de três pessoas é hostil. Prove que existe pelo menos um membro da sociedade cujos adversários contêm, ao todo, não mais que $q(1 - 4q/n^2)$ pares de amigos.

Problema 14. Mostre que se um grafo com n vértices não contém um subgrafo completo com k vértices ($k \geq 2$) então contém pelo menos $\lceil n/(k-1) \rceil$ vértices de grau menor ou igual a $\lfloor (k-2)n/(k-1) \rfloor$.

Problema 15. Um conjunto M contém 1001 pessoas e é tal que cada subconjunto de 11 pessoas contém pelo menos dois indivíduos que se conhecem. Mostre que existem pelo menos 101 pessoas onde cada uma delas conhece pelo menos 100 pessoas em M. (Dica: Use o exercício anterior no grafo complementar)

Problema 16. Prove que um grafo com n vértices e k arestas tem pelo menos $\dfrac{k(4k - n^2)}{3n}$ triângulos.

Problema 17. (Rússia 2001) Em uma festa, existem $2n + 1$ pessoas. Sabemos que para qualquer grupo de n pessoas, existe uma pessoa fora do grupo que as conhecem. Mostre que existe uma pessoa que conhece todos na festa.

Problema 18. (Rússia 2003) Existem n pessoa em uma festa. Após uma segundo, desde o início da festa, uma sirene toca e todos que conhecem 0 pessoas vão embora. Depois de um segundo a sirene toca e todos que conhecem 1 pessoa vão embora.Depois de um segundo a sirene toca novamente e todos que conhecem 2 pessoas dentre os restantes na festa vão embora. O processo se repete n vezes. Determine o maior número possível de pessoas que podem restar na festa.

Problema 19. [Bulgária 2001] Existem 2001 cidades em um país e toda cidade está ligada a pelo menos 1600 outras cidades por uma estrada azul. Encontre o maior n para o qual existem n cidades tal que quaisquer duas são ligadas por uma estrada.

Problema 20. [Banco IMO 1989] São dados 7 pontos no planos. Alguns deles são conectados por segmentos de modo que:

a) entre quaisquer três dos pontos dados, pelo menos dois estão conectados;

b) o número de segmentos é mínimo.

Determine quantos segmentos uma figura satisfazendo os dois itens anteriores deve possuir. Em seguida, construa um exemplo.

Problema 21. [Banco IMO 1989] Existem 155 passarinhos sobre um círculo C. Dizemos que dois passarinhos P_i e P_j são mutuamente vizinhos se $m * P_iP_j) \leq 10°$. Encontre o menor número de pares de passarinhos mutuamente vizinhos. Observação: Você deve assumir que um ponto (posição) em C pode ser ocupada por mias de um passarinho.