1 Teoria dos Números

1.1 Congruências

Problema 1

Mostre que $(a, m) = 1$ se, e somente se, a congruência $ax \equiv 1 (mod\, m)$ tem solução. Mostre ainda que todas as soluções são congruentes módulo m.

Problema 2

(Teorema de Euler) Se $(a, m) = 1$, mostre que

$$a^{\varphi(m)} \equiv 1 (mod\, m).$$

Conclua que, para p primo, vale $a^p \equiv a (mod\, p)$, para todo inteiro a. **(Teorema de Fermat)**

Problema 3

Mostre que se u e v são inteiros positivos tais que $a^u \equiv 1 (mod\, m)$ e $a^v \equiv 1 (mod\, m)$, então $a^{(u,v)} \equiv 1 (mod\, m)$.

Problema 4

Mostre que se n é um inteiro maior que 1, então n não divide $2^n - 1$.

Problema 5

Mostre que todos os divisores primos de $2^p - 1$, onde p é primo, são da forma $2kp + 1$.

Problema 6

Ache todos os primos p tais que $p \cdot (2^{p-1} - 1)$ é uma k-ésima potência de um inteiro positivo.

Problema 7

Determine todos os inteiros positivos a, b, c e d que satisfazem à equação

$$1 + 5^a = 2^b + 2^c \cdot 5^d.$$

Problema 8

Seja p um número primo. Mostre que o número

$$\underbrace{11\ldots1}_{p}\underbrace{22\ldots2}_{p}\cdots\underbrace{99\ldots9}_{p} - 123456789$$

é divisível por p.

Problema 9

Determine todos os inteiros positivos que são primos com todos os termos da seqüência

$$a_n = 2^n + 3^n + 6^n - 1 \quad (n = 1, 2, 3 \ldots).$$

1.2 Raízes Primitivas / Reciprocidade Quadrática

Problema 10

Prove que as seguintes proposições são equivalentes:
(a) Para todo inteiro positivo a, $n | a^n - a$;
(b) Para todo p, divisor primo de n, p^2 não divide n e $p - 1 | n - 1$.

Problema 11

Sejam p um primo ímpar, k um natural não divisível por p, $1 \leq k \leq 2(p+1)$ e $N = 2kp+1$. Prove que as seguintes proposições são equivalentes:
(1) N é primo.
(2) Existe um número natural a, $2 \leq a < N$ tal que

$$a^{kp} \equiv -1 (mod N) \quad \text{e} \quad (a^k + 1, N) = 1.$$

Problema 12

Determine todos os inteiros positivos n para os quais

$$\frac{2^n + 1}{n^2}$$

é inteiro.

Problema 13

Determine todos os pares (n, p) de inteiros estritamente positivos tais que
p é primo,
$n \leq 2p$ e
$(p - 1)^n + 1$ é divisível por n^{p-1}.

Problema 14

Mostre que todos os fatores primos de $n^4 - n^2 + 1$ são da forma $12t + 1$.

Problema 15

Prove que não existem inteiros x e y que satisfazem a equação

$$x^2 + 3xy - 2y^2 = 122.$$

Problema 16

(i) Prove que existem infinitos números primos da forma $3k - 1$;
(ii) Prove que existem infinitos números primos da forma $3k + 1$.

Problema 17

Seja $p = 2^n + 1$ um número primo. Prove que 3 é raiz primitiva módulo p.

Problema 18

Prove que 3 é resíduo quadrático módulo p, primo ímpar, se, e somente se, p é da forma $12t+1$ ou $12t-1$.

Problema 19

Sejam m e n números naturais tais que

$$A = \frac{(m+3)^n + 1}{3m}$$

é um inteiro. Prove que A é ímpar.

Problema 20

Determine todos os inteiros positivos n para os quais existe um inteiro m tal que $2^n - 1$ divide $m^2 + 9$.

Problema 21

Prove que se $m > 1$ e $n > 0$ têm a mesma paridade, então $3^n - 1$ não é divisível por $2^m - 1$.

1.3 Problemas Suplementares

Problema 22

Determine todos os pares (m, n) de inteiros positivos tais que $\dfrac{n^3+1}{mn-1}$ é inteiro.

Problema 23

Seja $p \geq 5$ um número primo. Prove que existe um inteiro a com $1 \leq a \leq p-2$ tal que nem $a^{p-1}-1$ nem $(a+1)^{p-1}-1$ é divisível por p^2.

Problema 24

Determine todas as triplas de inteiros positivos (a, m, n) tais que $a^m + 1$ divida $(a+1)^m$.

Problema 25

Existe um inteiro positivo n tal que n tem exatamente 2000 divisores primos e $2^n + 1$ é divisível por n?

Problema 26

Sejam b, m, n inteiros positivos tais que $b > 1$ e $m \neq n$. Suponha que $b^m - 1$ e $b^n - 1$ possuam os mesmos divisores primos. Mostre que $b + 1$ é uma potência de 2.