

Com quantos testes se faz um gabarito?

1. O problema

Uma prova tem 30 testes do tipo V ou F . Joãozinho não sabe a resposta de nenhum teste, mas pode fazer a mesma prova quantas vezes quiser. Depois da prova ele é informado somente da quantidade de testes que ele acertou (ele não é informado sobre quais testes ele acertou ou errou). Mostre que, após fazer a prova 24 vezes Joãozinho consegue descobrir as respostas, não importando quais sejam os resultados dos testes.

2. Primeira instrução

Pense um pouco no problema. Se 30 testes parecem muito, pense em uma prova com menos testes.

Com quantos testes se faz um gabarito?

1. O problema

Uma prova tem 30 testes do tipo V ou F . Joãozinho não sabe a resposta de nenhum teste, mas pode fazer a mesma prova quantas vezes quiser. Depois da prova ele é informado somente da quantidade de testes que ele acertou (ele não é informado sobre quais testes ele acertou ou errou). Mostre que, após fazer a prova 24 vezes Joãozinho consegue descobrir as respostas, não importando quais sejam os resultados dos testes.

2. Passo 1

Mostre que é suficiente mostrar que é possível descobrir as respostas de 5 testes fazendo a prova 4 vezes.

Com quantos testes se faz um gabarito?

1. O problema

Uma prova tem 30 testes do tipo V ou F . Joãozinho não sabe a resposta de nenhum teste, mas pode fazer a mesma prova quantas vezes quiser. Depois da prova ele é informado somente da quantidade de testes que ele acertou (ele não é informado sobre quais testes ele acertou ou errou). Mostre que, após fazer a prova 24 vezes Joãozinho consegue descobrir as respostas, não importando quais sejam os resultados dos testes.

2. Resolução do passo 1

Mostre que é suficiente mostrar que é possível descobrir as respostas de 5 testes fazendo a prova 4 vezes.

Resolução

Divida a prova em 6 pedaços (digamos, testes 1 a 5, testes 6 a 10, testes 11 a 15, testes 16 a 20, testes 21 a 25, testes 26 a 30). Suponha que sabemos descobrir as respostas certas de 5 testes fazendo a prova 4 vezes. Então descobrimos as respostas de 1 a 5 com 4 tentativas, as respostas de 6 a 10 com mais 4 tentativas, etc. Isso dá um total de $6 \cdot 4 = 24$ tentativas para descobrir as respostas dos 30 testes.

3. Passo 2

Como você descobriria as respostas de cinco testes com quatro tentativas?

Com quantos testes se faz um gabarito?

1. O problema

Uma prova tem 30 testes do tipo V ou F . Joãozinho não sabe a resposta de nenhum teste, mas pode fazer a mesma prova quantas vezes quiser. Depois da prova ele é informado somente da quantidade de testes que ele acertou (ele não é informado sobre quais testes ele acertou ou errou). Mostre que, após fazer a prova 24 vezes Joãozinho consegue descobrir as respostas, não importando quais sejam os resultados dos testes.

2. Resolução do passo 1

Mostre que é suficiente mostrar que é possível descobrir as respostas de 5 testes fazendo a prova 4 vezes.

Resolução

Divida a prova em 6 pedaços (digamos, testes 1 a 5, testes 6 a 10, testes 11 a 15, testes 16 a 20, testes 21 a 25, testes 26 a 30). Suponha que sabemos descobrir as respostas certas de 5 testes fazendo a prova 4 vezes. Então descobrimos as respostas de 1 a 5 com 4 tentativas, as respostas de 6 a 10 com mais 4 tentativas, etc. Isso dá um total de $6 \cdot 4 = 24$ tentativas para descobrir as respostas dos 30 testes.

3. Dicas para o passo 2

Você pode supor que Joãozinho marcou V em todos os testes na primeira tentativa. Além disso, observe que, por exemplo, marcar $VVFFV$ dá exatamente a mesma informação que marcar $FFVVF$.

Com quantos testes se faz um gabarito?

1. O problema

Uma prova tem 30 testes do tipo V ou F . Joãozinho não sabe a resposta de nenhum teste, mas pode fazer a mesma prova quantas vezes quiser. Depois da prova ele é informado somente da quantidade de testes que ele acertou (ele não é informado sobre quais testes ele acertou ou errou). Mostre que, após fazer a prova 24 vezes Joãozinho consegue descobrir as respostas, não importando quais sejam os resultados dos testes.

2. Resolução do passo 1

Mostre que é suficiente mostrar que é possível descobrir as respostas de 5 testes fazendo a prova 4 vezes.

Resolução

Divida a prova em 6 pedaços (digamos, testes 1 a 5, testes 6 a 10, testes 11 a 15, testes 16 a 20, testes 21 a 25, testes 26 a 30). Suponha que sabemos descobrir as respostas certas de 5 testes fazendo a prova 4 vezes. Então descobrimos as respostas de 1 a 5 com 4 tentativas, as respostas de 6 a 10 com mais 4 tentativas, etc. Isso dá um total de $6 \cdot 4 = 24$ tentativas para descobrir as respostas dos 30 testes.

3. Dicas para o passo 2

Você pode supor que Joãozinho marcou V em todos os testes na primeira tentativa. Além disso, observe que, por exemplo, marcar $VVFFV$ dá exatamente a mesma informação que marcar $FFVVV$.

Além disso, não vale a pena marcar só um teste com F .

Com quantos testes se faz um gabarito?

1. O problema

Uma prova tem 30 testes do tipo V ou F . Joãozinho não sabe a resposta de nenhum teste, mas pode fazer a mesma prova quantas vezes quiser. Depois da prova ele é informado somente da quantidade de testes que ele acertou (ele não é informado sobre quais testes ele acertou ou errou). Mostre que, após fazer a prova 24 vezes Joãozinho consegue descobrir as respostas, não importando quais sejam os resultados dos testes.

2. Resolução do passo 1

Mostre que é suficiente mostrar que é possível descobrir as respostas de 5 testes fazendo a prova 4 vezes.

Resolução

Divida a prova em 6 pedaços (digamos, testes 1 a 5, testes 6 a 10, testes 11 a 15, testes 16 a 20, testes 21 a 25, testes 26 a 30). Suponha que sabemos descobrir as respostas certas de 5 testes fazendo a prova 4 vezes. Então descobrimos as respostas de 1 a 5 com 4 tentativas, as respostas de 6 a 10 com mais 4 tentativas, etc. Isso dá um total de $6 \cdot 4 = 24$ tentativas para descobrir as respostas dos 30 testes.

3. Uma resposta para o passo 2

Responder $VVVVV$, $FFVVV$, $FVFFV$ e $FVFFV$ dá certo. Verifique por quê.

Com quantos testes se faz um gabarito?

1. O problema

Uma prova tem 30 testes do tipo V ou F . Joãozinho não sabe a resposta de nenhum teste, mas pode fazer a mesma prova quantas vezes quiser. Depois da prova ele é informado somente da quantidade de testes que ele acertou (ele não é informado sobre quais testes ele acertou ou errou). Mostre que, após fazer a prova 24 vezes Joãozinho consegue descobrir as respostas, não importando quais sejam os resultados dos testes.

2. Resolução do passo 1

Mostre que é suficiente mostrar que é possível descobrir as respostas de 5 testes fazendo a prova 4 vezes.

Resolução

Divida a prova em 6 pedaços (digamos, testes 1 a 5, testes 6 a 10, testes 11 a 15, testes 16 a 20, testes 21 a 25, testes 26 a 30). Suponha que sabemos descobrir as respostas certas de 5 testes fazendo a prova 4 vezes. Então descobrimos as respostas de 1 a 5 com 4 tentativas, as respostas de 6 a 10 com mais 4 tentativas, etc. Isso dá um total de $6 \cdot 4 = 24$ tentativas para descobrir as respostas dos 30 testes.

3. Resolução do passo 2

Mostre que é possível descobrir as respostas de 5 testes fazendo a prova 4 vezes.

Resolução

Responder $VVVVV$, $FFVVV$, $FVFFV$ e $FVFFV$ dá certo. A primeira tentativa nos diz quantos testes têm resposta V . Note que, com os três últimos testes, respondemos V para cada um dos quatro primeiros testes uma quantidade par de vezes (nenhuma vez para o teste 1 e 2 vezes para cada um dos demais) e para o último teste uma quantidade ímpar de vezes (3). Assim, somando os acertos, os acertos com V são contados uma quantidade par de vezes, exceto talvez para o último teste. Então a paridade da soma dos resultados dos três últimos testes vai dizer a resposta do último teste: se for par é V e se for ímpar é F .

Descontando a resposta certa ou errada para o último teste, temos agora quantos dos quatro primeiros testes têm resposta V (pela primeira tentativa) e quantos de quaisquer dois dos quatro primeiros testes têm resposta V (comparando a primeira tentativa com cada uma das demais tentativas). Se algum conjunto de dois testes tem 0 ou 2 V s já sabemos quais são as respostas. Aí é só ver a primeira tentativa com cada um dos outros para saber o resto.

O único caso que pode dar trabalho é se quaisquer dois dos quatro primeiros testes têm um V e um F . Isso quer dizer que exatamente dois testes têm V , mas isso é um absurdo. Logo estudamos todos os casos e resolvemos o problema.

4. Um outro desafio para você

Mostre que se a prova tivesse 8 testes então é possível descobrir todas as respostas com 6 tentativas.

Atenção! Dividir em duas provas com 4 testes e tentar achar as respostas com três tentativas não dá certo!