Este é um "crash course" em Topologia Algébrica. Espero que estas notas os instiguem a aprender mais sobre esta bela área da Matemática. Em todo caso, você poderá contar os teoremas aqui mostrados (ponto fixo de Brouwer, Borsuk-Ulam, etc.) em festas para impressionar seus amigos e fazer o maior sucesso!

1 Teorema do ponto fixo de Brouwer

Notação:

$$S^1 \stackrel{\text{df}}{=} \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\} \qquad \text{(circunferência unitária: só a casca)}$$
$$D^2 \stackrel{\text{df}}{=} \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\} \qquad \text{(círculo unitário: casca e miolo)}$$

(o índice denota a dimensão do objeto)

Teorema 1.1 (Brouwer) *Qualquer função contínua $f\colon D^2 \to D^2$ admite um ponto fixo, i.e., existe $x \in D^2$ tal que $f(x) = x$.*

A demonstração é uma redução ao teorema a seguir. Uma **retração** $r\colon D^2 \to S^1$ é um mapa contínuo que é a identidade quando restrito à S^1.

Teorema 1.2 (No retraction) *Não existem retrações $r\colon D^2 \to S^1$.*

Para demonstrar o "no retraction theorem" vamos construir na seção seguinte um funtor de espaços topológicos para grupos que "mede buracos".

Um **funtor** F de espaços topológicos para grupos é uma associação

1. para cada espaço topológico X, um grupo $F(X)$;
2. para cada função contínua $f\colon X \to Y$, um morfismo $F(f)\colon F(X) \to F(Y)$ de grupos.

Esta associação está sujeita aos seguintes axiomas:

1. F preserva a função identidade: $F(\mathrm{id}_X) = \mathrm{id}_{F(X)}$ para todo espaço topológico X;
2. F preserva composições: dadas funções contínuas $f\colon X \to Y$ e $g\colon Y \to Z$, temos que $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$.

Suponha por um instante que tenhamos construído um funtor F tal que

$$F(D^2) = 0 \text{ (grupo trivial)}$$
$$F(S^1) \neq 0 \text{ (digamos } F(S^1) = \mathbb{Z} \text{ por exemplo)}$$

(é neste sentido que F mede buracos). Se realmente existisse uma retração $r\colon D^2 \to S^1$, teríamos que a composição

$$S^1 \xhookrightarrow{\text{inclusão}} D^2 \xrightarrow{r} S^1$$

seria a identidade em S^1. Aplicando F teríamos que

$$F(S^1) \longrightarrow F(D^2) \longrightarrow F(S^1)$$

é igual a identidade, mas isto é absurdo, porque $F(D^2) = 0$ e $F(S^1) \neq 0$.

Exercício 1.1 O teorema do ponto fixo de Brouwer vale para o toro $S^1 \times S^1$ (só a casca)?

2 Grupo fundamental

Fixe um espaço topológico X. Um **caminho** em X é uma aplicação contínua $\gamma\colon [0,1] \to X$; um caminho γ é chamado de **laço** se $\gamma(0) = \gamma(1)$ (equivalentemente, um laço é uma função contínua $\gamma\colon S^1 \to X$). Dizemos que dois caminhos γ e δ são **homotópicos**, e escrevemos $\gamma \sim \delta$, se o primeiro pode ser continuamente deformado no segundo: existe uma função contínua $h\colon [0,1] \times [0,1] \to X$ tal que $h(0,x) = \gamma(x)$ em "tempo 0" e $h(1,x) = \delta(x)$ em "tempo 1". Mais geralmente, duas funções contínuas $f, g\colon X \to Y$ são **homotópicas** (em símbolos $f \sim g$) se existe uma função contínua $h\colon [0,1] \times X \to Y$ tal que $h(0,x) = f(x)$ em tempo 0 e $h(1,x) = g(x)$ em tempo 1.

De agora em diante, trabalharemos com **espaços topológicos pontuados** (X, x_0), isto é, um espaço topológico X com uma escolha de um **ponto base** $x_0 \in X$. Um laço γ em um espaço pontuado (X, x_0) é definido como um laço em X tal que $\gamma(0) = \gamma(1) = x_0$; uma homotopia h entre dois laços deve satisfazer a condição adicional $h(t,0) = h(t,1) = x_0$ para todo $t \in [0,1]$ (em outras palavras, $x \mapsto h(t,x)$ é um laço no espaço pontuado para cada t). É fácil ver que $\sim$ é uma relação de equivalência no conjunto dos laços, e denotamos por $[\gamma]$ a classe de equivalência de γ.

No nosso exemplo concreto $X = S^1$ ou $X = D^2$, tomaremos o número complexo $x_0 = 1$ como ponto base. Exemplos de laços em ambos os espaços são dados por $\gamma(x) = e^{2\pi ix}$ e pelo laço constante $e_0(x) = 1$ para todo $x \in [0, 1]$. É fácil ver que em $X = D^2$ estes laços são homotópicos (por exemplo, tome $h(t, x) = e^{2\pi itx}$). Veremos entretanto na próxima seção que γ *não* é homotópico a e_0 em $X = S^1$.

Definimos a **concatenação** de dois laços γ e δ como sendo o laço $\gamma * \delta$ dado por

$$(\gamma * \delta)(x) = \begin{cases} \gamma(2x) & \text{se } 0 \leq x \leq 1/2 \\ \delta(2x - 1) & \text{se } 1/2 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Agora definimos uma operação de multiplicação (em geral não comutativa) nas classes de equivalência de laços:

$$[\gamma] \cdot [\delta] \overset{\text{df}}{=} [\gamma * \delta]$$

É fácil mostrar (mais meio chato, e melhor feito na privacidade do seu lar) que esta operação está bem definida e é associativa. O **laço constante**

$$e_0(x) = x_0, \qquad x \in [0, 1]$$

é a identidade desta operação, i.e., $[\gamma]\cdot[e_0] = [e_0]\cdot[\gamma] = [\gamma]$ para todo laço γ. Finalmente temos que $[\gamma]\cdot[\gamma^{-1}] = [\gamma^{-1}]\cdot[\gamma] = [e_0]$, onde γ^{-1} é definido como

$$\gamma^{-1}(x) \overset{\text{df}}{=} \gamma(1 - x), \qquad x \in [0, 1]$$

isto é, percorrendo γ na direção oposta. Com isto temos uma estrutura de grupo no conjunto das classes de equivalência de laços. O grupo assim obtido é chamado de **primeiro grupo fundamental** de X e é denotado por $\pi_1(X, x_0)$. Por exemplo, é fácil ver que $\pi_1(D^2, x_0) = 0$ para qualquer ponto $x_0 \in D^2$.

Agora seja Y um segundo espaço topológico e $f\colon X \to Y$ uma função contínua. Temos que f dá origem a um morfismo de grupos

$$\begin{aligned} \pi_1(X, x_0) &\to \pi_1(Y, f(x_0)) \\ [\gamma] &\mapsto [f \circ \gamma] \end{aligned}$$

(novamente é fácil e chato demonstrar que tudo está bem definido). Claramente esta associação respeita a identidade e composições, e portanto temos que o grupo fundamental define na verdade um funtor. Este funtor é um dos candidatos para completar a demonstração do teorema do ponto fixo de Brouwer; na próxima seção veremos que de fato $\pi_1(S^1, 1) \neq 0$.

Exercício 2.1 Para mostrar que você realmente entendeu as definições, prove que $\gamma * e_0 \sim \gamma$ para qualquer laço γ.

Exercício 2.2 Seja $x_1 \in X$ outro ponto base e $\alpha\colon [0, 1] \to X$ um caminho ligando x_0 a x_1 (i.e., $\alpha(0) = x_0$ and $\alpha(1) = x_1$). Para um laço γ em X com $\gamma(0) = \gamma(1) = x_0$ defina o laço

$$(\alpha^{-1} * \gamma * \alpha)(x) \overset{\text{df}}{=} \begin{cases} \alpha^{-1}(3x) & \text{se } 0 \leq x \leq 1/3 \\ \gamma(3x - 1) & \text{se } 1/3 \leq x \leq 2/3 \\ \alpha(3x - 2) & \text{se } 2/3 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Mostre que

$$\begin{aligned} \pi_1(X, x_0) &\to \pi_1(X, x_1) \\ [\gamma] &\mapsto [\alpha^{-1} * \gamma * \alpha] \end{aligned}$$

esta bem definido e é um isomorfismo de grupos. Isto mostra que se o espaço for conexo por caminhos, tanto faz a escolha do ponto base.

Exercício 2.3 Sejam (X, x_0) e (Y, y_0) dois espaços topológicos pontuados conexos por caminhos. Mostre que as projeções $X \times Y \to X$ e $X \times Y \to Y$ dão origem a um isomorfismo

$$\pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \cong \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0)$$

Exercício 2.4 Seja X a *faixa de Möbius* (mais conhecido como *logo do IMPA*) e A sua circunferência medial (isto é, a circunferência que fica no equador, *não* a da borda). Seja $x_0 \in A$ um ponto base. Mostre que a inclusão $A \hookrightarrow X$ induz um isomorfismo $\pi_1(A, x_0) \cong \pi_1(X, x_0)$. Em outras palavras, o grupo fundamental da faixa de Möbius é igual à da circunferência.

3 Grupo fundamental da circunferência

Vamos calcular $\pi_1(S^1, 1)$. O truque consiste em considerar o "recobrimento" de S^1 pela reta real $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\xrightarrow{p} S^1 \\ x &\mapsto e^{2\pi i x} \end{aligned}$$

(imagine a reta $\mathbb{R}$ como uma espiral sobre S^1 e $p\colon \mathbb{R} \to S^1$ como a projeção vertical).

Teorema 3.1 (Path lifting) *Seja $\gamma\colon [0,1] \to S^1$ um laço com $\gamma(0) = \gamma(1) = 1$. Existe um único "levantamento" de γ, i.e., um caminho $\tilde{\gamma}\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ tal que $p \circ \tilde{\gamma} = \gamma$ e $\tilde{\gamma}(0) = 0$.*

PROVA Primeiramente, observe que a pré-imagem por p de um arco aberto de (digamos) 60° é uma união *disjunta* de intervalos abertos de $\mathbb{R}$ homeomorfos ao arco. Agora, dividimos o intervalo $[0,1]$ em um número finito de intervalos abertos U_i de modo que, para cada i, $\gamma(U_i)$ esteja contido em um arco aberto de 60°: isto é possível porque para cada ponto $x \in [0,1]$ a pré-imagem por γ do arco aberto de 60° com centro em $\gamma(x)$ é aberto pois γ é contínua, e portanto existe um intervalo aberto $U_x \subset [0,1]$ contendo x para o qual $\gamma(U_x)$ está contido neste arco; como os U_x cobrem o espaço compacto $[0,1]$, podemos extrair uma subcobertura finita U_i. Para fixar a notação, numere os U_i em ordem crescente de suas extremidades à esquerda. Finalmente, começando do intervalo U_0 que contém o 0, só há uma maneira de levantar $\gamma|_{U_i}$ em um caminho $\tilde{\gamma}\colon U_i \to \mathbb{R}$ concordando com o levantamento do intervalo anterior U_{i-1}. □

Precisaremos também do

Teorema 3.2 (Homotopy lifting) *Sejam $\gamma, \delta\colon [0,1] \to S^1$ dois laços homotópicos e $h\colon [0,1] \times [0,1] \to S^1$ uma homotopia entre eles. Existe um único "levantamento" de h, i.e., uma função contínua $\tilde{h}\colon [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ tal que $p \circ \tilde{h} = h$ e $\tilde{h}(t,0) = 0$ para todo $t \in [0,1]$.*

PROVA A idéia é idêntica à do path lifting: como antes, existem um número finito de intervalos abertos $U_i \subset [0,1]$ e $V_j \subset [0,1]$ tal que a imagem $h(U_i \times V_j)$ de cada retângulo $U_i \times V_j$ esteja inteiramente contida em um arco aberto de 60° (o ângulo místico que faz esta demonstração funcionar, ha, ha, ha, ...). Basta construir o levantamento de retângulo em retângulo, começando daqueles que contém $[0,1] \times \{0\}$. □

Teorema 3.3 *Temos um isomorfismo $\pi_1(S^1, 1) = \mathbb{Z}$. Um gerador deste grupo é a classe do laço $\lambda(x) = e^{2\pi i x}$, $x \in [0,1]$.*

PROVA Definimos um mapa

$$\begin{aligned} \mathbb{Z} &\to \pi_1(S^1, 1) \\ n &\mapsto n \cdot [\lambda] \end{aligned}$$

Para mostrar que este mapa é um isomorfismo, vamos definir um outro no sentido contrário (o candidato a inverso):

$$\begin{aligned} \pi_1(S^1, 1) &\to \mathbb{Z} \\ [\gamma] &\mapsto \tilde{\gamma}(1) \end{aligned}$$

onde $\tilde{\gamma}$ é o levantamento de γ como no teorema acima. Observe que $p(\tilde{\gamma}(1)) = 1$ e portanto $\tilde{\gamma}(1)$ é um inteiro. O problema é mostrar que isto está bem definido, isto é, se $\gamma \sim \delta$ então $\tilde{\gamma}(1) = \tilde{\delta}(1)$. Seja uma h uma homotopia entre γ e δ e $\tilde{h}$ o levantamento de h. Temos que $t \mapsto \tilde{h}(t,1)$ é um mapa contínuo, mas como $p \circ \tilde{h}(t,1) = h(t,1) = 1$ temos que $\tilde{h}(t,1)$ é *inteiro*, portanto $t \mapsto \tilde{h}(t,1)$ é constante, logo $\tilde{\gamma}(1) = \tilde{h}(0,1) = \tilde{h}(1,1) = \tilde{\delta}(1)$, como desejado.

Agora vamos mostrar que este mapa é um morfismo de grupos. Sejam γ e δ dois laços e $m = \tilde{\gamma}(1)$ e $n = \tilde{\delta}(1)$. Considere a concatenação de $\tilde{\gamma}$ e $\tilde{\delta}$, definido como

$$(\tilde{\gamma} * \tilde{\delta})(x) \stackrel{\text{df}}{=} \begin{cases} \tilde{\gamma}(2x) & \text{se } 0 \le x \le 1/2 \\ m + \tilde{\delta}(2x-1) & \text{se } 1/2 \le x \le 1 \end{cases}$$

Então $\widetilde{\gamma * \delta} = \tilde{\gamma} * \tilde{\delta}$ já que ambos são levantamentos de $\gamma * \delta$ (unicidade!). Daí $(\widetilde{\gamma * \delta})(1) = (\tilde{\gamma} * \tilde{\delta})(1) = m + n$, que é o que queríamos mostrar.

Agora vamos mostrar que os mapas definidos são realmente inverso um do outro. É fácil ver a partir das definições que $\mathbb{Z} \to \pi_1(S^1, 1) \to \mathbb{Z}$ é identidade. Para mostrar que $\pi_1(S^1, 1) \to \mathbb{Z} \to \pi_1(S^1, 1)$ também é a identidade, seja $[\gamma] \in \pi_1(S^1, 1)$ e $n = \tilde{\gamma}(1)$. Temos que mostrar que $\gamma \sim \lambda_n$, onde $\lambda_n(x) = e^{2\pi i n x}$. Mas como $\tilde{\gamma}$ e $\tilde{\lambda}_n$ são dois caminhos em $\mathbb{R}$ começando em 0 e terminado no mesmo ponto, eles são homotópicos no sentido de que existe uma aplicação contínua $\tilde{h}\colon [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ com $\tilde{h}(0,x) = \tilde{\gamma}(x)$, $\tilde{h}(1,x) = \tilde{\lambda}_n(x)$, $\tilde{h}(t,0) = 0$ e $\tilde{h}(t,1) = n$ para todo x e t (por exemplo, tome $h(t,x) = (1-t) \cdot \tilde{\gamma}(x) + t \cdot nx$). Mas agora $p \circ \tilde{h}$ é uma homotopia entre γ e λ_n. □

Exercício 3.1 Calcule o grupo fundamental do toro $S^1 \times S^1$.

Exercício 3.2 Se $A \subset X$, uma **retração** $r\colon X \to A$ é um mapa contínuo tal que $r|_A = \mathrm{id}$. Mostre que não existem retrações nos seguintes casos:
(a) $X = D^2 \times S^1$ (toro sólido, mais conhecido como *doughnut*) e sua borda $A = \partial X = S^1 \times S^1$.
(b) X é a faixa de Möbius e a sua borda $A = S^1$ (*não* a sua circunferência medial).

4 Outras aplicações

Definição 4.1 Seja $f\colon S^1 \to S^1$ um mapa contínuo, e considere o mapa normalizado $f_0\colon S^1 \to S^1$ dado por $f_0(z) = f(z)/f(1)$, que leva o ponto base 1 no ponto base 1. Utilizando o isomorfismo $\pi_1(S^1, 1) = \mathbb{Z}$, o mapa

$$\pi_1(f_0)\colon \pi_1(S^1, 1) \to \pi_1(S^1, 1)$$

é dado pela multiplicação por um inteiro, chamado de **grau** de f e denotado por $\deg(f)$ (em reverência ao termo gêmeo em inglês, o *degrau*).

Por exemplo, se $f(z) = z^n$ para $z \in S^1$, então $\deg(f) = n$. Temos o seguinte

Lemma 4.2 *Se $f, g\colon S^1 \to S^1$ são duas funções contínuas homotópicas, então* $\deg(f) = \deg(g)$.

Prova Seja $h\colon [0,1] \times S^1 \to S^1$ uma homotopia entre f e g, e considere o laço $\lambda(x) = e^{2\pi i x}$, cuja classe gera $\pi_1(S^1, 1)$. Então $\deg(f)$ é dado por $f \circ \lambda$ (mais precisamente, pela imagem da classe de $f \circ \lambda$ pelo isomorfismo $\pi_1(S^1, 1) = \mathbb{Z}$, mas você já pegou a idéia...), e da mesma forma $\deg(g)$ corresponde a $g \circ \lambda$. Porém $h(t, \lambda(x))$ é uma homotopia entre estes dois laços. □

Agora utilizaremos este fato para provar o

Teorema 4.3 (Teorema fundamental da Álgebra) *Todo polinômio $p(z) \in \mathbb{C}[z]$ possui uma raiz complexa.*

Prova Podemos supor que $p(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_0$ seja mônico com $n > 0$. Suponha que $p(z) \neq 0$ para todo $z \in \mathbb{C}$. Podemos definir a função contínua

$$f(z) \stackrel{\mathrm{df}}{=} \frac{p(z)/p(1)}{|p(z)/p(1)|}$$

de S^1 em S^1, já devidamente normalizada. Agora vamos calcular o grau de f de duas formas distintas. A primeira utiliza o fato de que $f(z)$ é aproximadamente z para $|z| \to \infty$. Considere

$$m(t, z) \stackrel{\mathrm{df}}{=} t^n \cdot p(z/t) = z^n + a_{n-1}tz^{n-1} + \cdots + a_0 t^n$$

Observe que $m(t, z) \neq 0$ para todo $t \in [0, 1]$ e $z \in S^1$. Portanto podemos definir $h_\infty\colon [0,1] \times S^1 \to S^1$ dada por

$$h_\infty(t, z) \stackrel{\mathrm{df}}{=} \frac{m(t, z)/m(t, 1)}{|m(t, z)/m(t, 1)|}$$

que mostra que $f(z)$ e z^n são homotópicas, e portanto $\deg(f) = n$.

A segunda maneira de calcular $\deg(f)$ utiliza o fato de que $p(z) \neq 0$ para $z \in D^2$ para "deformar" f na função constante 1. Basta considerar

$$h_0(t, z) \stackrel{\mathrm{df}}{=} \frac{p(tz)/p(t)}{|p(tz)/p(t)|}$$

Assim $\deg(f) = 0$. É, acho que tem alguma coisa errada... □

Mais notação:

$$S^n \stackrel{\mathrm{df}}{=} \{(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_1^2 + \cdots + x_{n+1}^2 = 1\} \qquad \text{(esfera unitária)}$$
$$D^n \stackrel{\mathrm{df}}{=} \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 + \cdots + x_n^2 \leq 1\} \qquad \text{(disco unitário)}$$

(O bordo de D^n é $\partial D = S^{n-1}$).

O próximo teorema é mais um dos clássicos (isto é, que devem ser estudados em classe), mas eu vou deixá-lo como exercício.

Teorema 4.4 (Borsuk-Ulam) *Seja $f\colon S^2 \to \mathbb{R}^2$ uma aplicação contínua. Existe um par de pontos antipodais (i.e. diametralmente opostos) P e $-P$ de S^2 tal que $f(P) = f(-P)$.*

O teorema, obviamente, diz que existem dois pontos diametralmente opostos da Terra cujas temperatura e pressão são idênticas! Outra conseqüência é o seguinte

Teorema 4.5 *Sejam F_1, F_2, F_3 três subconjuntos fechados de S^2. Se $F_1 \cup F_2 \cup F_3 = S^2$ então pelo menos um dos F_i contém dois pontos diametralmente opostos.*

Exercício 4.1 Mostre que todo mapa contínuo $f\colon S^1 \to S^1$ com $\deg f \neq 1$ possui um ponto fixo.

Exercício 4.2 Mostre a recíproca do lema 4.2 acima: se $\deg(f) = \deg(g)$ então $f \sim g$.

Exercício 4.3 Seja $p(z) \in \mathbb{C}[z]$ um polinômio sem raízes em S^1. Mostre que o número de raízes de $p(z)$ no disco D^2 é igual ao grau de $f(z) \overset{\text{df}}{=} p(z)/|p(z)|$.

Exercício 4.4 Neste exercício vamos demonstrar o teorema de Borsuk-Ulam. Suponha que ele seja falso e considere a função $g\colon S^2 \to S^1$ dada por

$$g(P) \overset{\text{df}}{=} \frac{f(P) - f(-P)}{|f(P) - f(-P)|}$$

onde $|\cdot|$ denota a distância em $\mathbb{R}^2$. Restrita ao equador, temos que g define uma função ímpar $g_1\colon S^1 \to S^1$, i.e., $g_1(-z) = -z$ para todo $z \in S^1$.

(i) Mostre que se $g_1\colon S^1 \to S^1$ é uma função ímpar, então $\deg(g_1)$ é ímpar. (Dica: use o path lifting theorem)

(ii) Mostre que g_1 dado acima é homotópico a uma função constante, contradizendo (i). (Dica: deforme g_1 até o pólo norte de S^2)

Exercício 4.5 O teorema de Borsuk-Ulam vale para o toro? Em outras palavras, é verdade que para todo mapa contínuo $f\colon S^1 \times S^1 \to \mathbb{R}^2$ existe $(x,y) \in S^1 \times S^1$ tal que $f(x,y) = f(-x,-y)$?

Exercício 4.6 Sejam F_1, F_2, F_3 três subconjuntos compactos de $\mathbb{R}^3$. Mostre que existe um plano H que simultaneamente divide cada um dos F_i em dois pedaços de mesmo volume.

5 Homologia

WARNING! A partir desta seção, as provas de muitos resultados serão omitidas por um problema de relatividade, a contração do espaço-tempo.

Não surpreendentemente, o teorema do ponto fixo de Brouwer vale em qualquer dimensão: se $f\colon D^n \to D^n$ é uma função contínua, então ela tem um ponto fixo. Esta versão generalizada é particularmente interessante para $n = 3$, porque este é outro fato que pode ser contado em festas para impressionar seus amigos: não importa como você misture o café em uma xícara, sempre existe uma partícula de café que retorna ao seu lugar de origem! A demonstração é a mesma da primeira seção, uma vez que conseguirmos construir funtores que "medem" buracos n-dimensionais; em outras palavras, queremos um funtor F para o qual $F(D^n) = 0$ mas $F(S^n) \neq 0$.

Para cada $n \geq 0$, vamos construir um funtor H_n de espaços topológicos para grupos *abelianos* que mede buracos do tipo "limitados por S^n". A fim de simplificar a construção, substituímos D^n por um n-simplexo Δ_n, já que o bordo de Δ_n é formado por $(n-1)$-simplexos Δ_{n-1}, o que facilitará uma abordagem indutiva.

Definição 5.1 No espaço $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ considere os vértices

$$v_0 \overset{\text{df}}{=} (0,0,0,0,0,\ldots), \qquad v_1 \overset{\text{df}}{=} (1,0,0,0,0,\ldots), \qquad v_2 \overset{\text{df}}{=} (0,1,0,0,0,\ldots), \qquad \text{etc}$$

O **n-simplexo elementar** Δ_n é a combinação convexa

$$\Delta_n \overset{\text{df}}{=} [v_0, v_1, \ldots, v_n] = \{t_0 v_0 + \cdots + t_n v_n \mid t_i \geq 0, t_0 + \cdots + t_n = 1\}$$

Para $0 \leq i \leq n$, a **i-ésima face** $\Delta_n^{(i)}$ de Δ_n é definida como

$$\Delta_n^{(i)} \overset{\text{df}}{=} [v_0, \ldots, \hat{v}_i, \ldots, v_n]$$

obtido omitindo-se a i-ésima coordenada. Temos um homeomorfismo $e_i\colon \Delta_{n-1} \to \Delta_n^{(i)}$ definido pelo mapa linear que leva $v_0, \ldots, v_{n-1}$ em $v_0, \ldots, \hat{v}_i, \ldots, v_n$ *preservando a ordem dos vértices*.

Agora seja X um espaço topológico. Um **n-simplexo singular** em X é definido como um mapa contínuo $\sigma\colon \Delta_n \to X$. A **$i$-ésima face** $\sigma^{(i)}$ de σ é definida como o $(n-1)$-simplexo singular $\sigma^{(i)}\colon \Delta_{n-1} \to X$ dado por $\sigma^{(i)} = \sigma \circ e_i$.

Para $n = 0, 1, 2, 3$, temos que $\Delta_0, \Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ são respectivamente um ponto, um segmento unitário, um triângulo e um tetraedro. Temos que, por exemplo, as faces de $\Delta_2 = [v_0, v_1, v_2]$ são os segmentos $[v_1, v_2]$, $[v_0, v_2]$ e $[v_0, v_1]$. Se $\sigma\colon \Delta_2 \to X$ é um 2-simplexo singular, sua primeira face $\sigma^{(0)}$ é um caminho em X que parte de $\sigma(v_1)$ e termina em $\sigma(v_2)$.

Agora seja $C_n(X)$ para o grupo abeliano livre gerado pelos n-simplexos singulares. Explicitamente um elemento de $C_n(X)$ é uma soma formal

$$n_1\sigma_1 + \cdots + n_r\sigma_r$$

com $n_i \in \mathbb{Z}$ e onde $\sigma_i\colon \Delta_n \to X$ são n-simplexos singulares distintos. Outro jeito de pensar em $C_n(X)$ é como o conjunto de vetores (n_σ) com entradas $n_\sigma \in \mathbb{Z}$, uma para cada n-simplexo singular $\sigma\colon \Delta_n \to X$, de modo que $n_\sigma \neq 0$ somente para um número *finito* de entradas. A soma é feita componente a componente.

Definição 5.2 Definimos o **bordo** $\partial_n\colon C_n(X) \to C_{n-1}(X)$ como o morfismo de grupos abelianos dado por

$$\partial_n(\sigma) \overset{\text{df}}{=} \sum_{0 \le i \le n} (-1)^i \sigma^{(i)}$$

É fácil verificar que esta convenção de sinais implica que

$$\partial_{n-1} \circ \partial_n = 0 \iff \operatorname{im} \partial_n \subset \ker \partial_{n-1}$$

Definimos o **n-ésimo grupo de homologia** com coeficientes em $\mathbb{Z}$, denotado por $H_n(X, \mathbb{Z})$ ou simplesmente por $H_n(X)$, como sendo o quociente

$$H_n(X) \overset{\text{df}}{=} \frac{\ker \partial_{n-1}}{\operatorname{im} \partial_n}$$

Por exemplo, se $\sigma, \rho, \tau\colon \Delta_1 \to X$ são três caminhos "fechando um laço", isto é, com $\sigma(v_1) = \rho(v_0)$, $\rho(v_1) = \tau(v_0)$ e $\tau(v_1) = \sigma(v_0)$, então

$$s \overset{\text{df}}{=} \sigma - \rho + \tau \in \ker \partial_1$$

pois

$$\partial s = \sigma(v_1) - \sigma(v_0) + \rho(v_1) - \rho(v_0) + \tau(v_1) - \tau(v_0) = 0$$

Se ocorrer de que σ, ρ, τ são os lados de um "triângulo", isto é, existe um 2-simplexo singular $\psi\colon \Delta_2 \to X$ com $\psi^{(0)} = \sigma$, $\psi^{(1)} = \rho$ e $\psi^{(2)} = \tau$, então $s = \partial_2\psi$ e portanto a imagem de s em $H_1(X)$ será 0. Isto está em conformidade com a idéia de que o H_1 mede buracos do tipo limitado por laços, pois o laço correspondente a s é restrição de um mapa contínuo $\psi\colon \Delta_2 \to X$ e portanto é homotópico a 0. Estar no kernel de ∂_1 é uma maneira algébrica de dizer que os caminhos correspondentes formam um laço; estar na imagem de ∂_2 indica que este laço é homotópico a 0.

Se $f\colon X \to Y$ é um mapa contínuo, temos um morfismo de grupos

$$\begin{aligned} H_n(f)\colon H_n(X) &\to H_n(Y) \\ [\sigma] &\mapsto [f \circ \sigma] \end{aligned}$$

onde $[\sigma]$ denota a imagem do n-simplexo singular σ em $H_n(X)$, e similarmente para $[f \circ \sigma]$. Novamente é um exercício rotineiro e chato verificar que este mapa faz sentido. Com isso, provamos que H_n realmente define um funtor de espaços topológicos para grupos abelianos.

Exercício 5.1 Mostre que se X é conexo por caminhos então $H_0(X) \cong \mathbb{Z}$.

Exercício 5.2 Considere o 1-simplexo em S^1 dado por $\lambda(x) = e^{2\pi i x}$, $x \in [0, 1] = \Delta_1$, e a função $f(z) = z^n$ de S^1 em S^1. Mostre que $H_1(f)([\lambda]) = n[\lambda]$ onde $[\lambda]$ denota a classe de λ.

6 Alguns lemas algébricos

Precisaremos de alguns resultados puramente algébricos. Abstraindo a situação anterior, temos a seguinte

Definição 6.1 Uma seqüência de morfismos de grupos abelianos

$$\cdots \longrightarrow C_i \xrightarrow{d_i} C_{i-1} \xrightarrow{d_{i-1}} C_{i-2} \xrightarrow{d_{i-2}} \cdots$$

é chamado **complexo** se $d_{i-1} \circ d_i = 0 \iff \operatorname{im} d_i \subset \ker d_{i-1}$ para todo i. O **i-ésimo grupo de homologia** do complexo acima é definido como

$$h_i(C_\bullet) \overset{\text{df}}{=} \frac{\ker d_{i-1}}{\operatorname{im} d_i}$$

Se $h_i(C_\bullet) = 0$ para todo i, o complexo é dito **exato**.

Um caso particular importante é o de **seqüência exata curta**, que consiste de apenas três termos não nulos:

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$$

Neste caso, dizer que esta seqüência é exata é o mesmo que dizer que f é injetor, g é sobrejetor e $\ker g = \operatorname{im} f$. Em outras palavras, podemos ver A como um subgrupo de B e C como sendo o quociente B/A. A idéia é pensar no grupo do meio como sendo "montado" a partir dos dois da ponta; por exemplo, se A, B, C são k-espaços vetoriais, então $\dim_k B = \dim_k A + \dim_k C$.

Definição 6.2 Sejam $(C_\bullet, d_\bullet)$ e $(C'_\bullet, d'_\bullet)$ dois complexos. Um **morfismo de complexos** $f_\bullet\colon C_\bullet \to C'_\bullet$ é uma coleção de morfismos $f_i\colon C_i \to C'_i$ de grupos abelianos que comutam com d_i e d'_i, isto é, $f_{i-1} \circ d_i = d'_i \circ f_i$ para todo i.

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & C_i \arrow[r, "d_i"] \arrow[d, "f_i"'] & C_{i-1} \arrow[r, "d_{i-1}"] \arrow[d, "f_{i-1}"'] & C_{i-2} \arrow[r, "d_{i-2}"] \arrow[d, "f_{i-2}"'] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & C'_i \arrow[r, "d'_i"] & C'_{i-1} \arrow[r, "d'_{i-1}"] & C'_{i-2} \arrow[r, "d'_{i-2}"] & \cdots
\end{tikzcd}$$

É fácil mostrar que os f_i induzem mapas $h_i(f_\bullet)\colon h_i(C_\bullet) \to h_i(C'_\bullet)$, de forma que temos funtores h_i de complexos para grupos abelianos.

Por exemplo, dado um mapa contínuo $f\colon X \to Y$, então temos mapas de grupos abelianos $f_i\colon C_i(X) \to C_i(Y)$ dados por $\sigma \mapsto f \circ \sigma$ para todo simplexo singular $\sigma\colon \Delta_i \to X$, e estendido linearmente para todo $C_i(X)$. Estes mapas f_i definem um mapa entre os complexos $C_\bullet(X)$ e $C_\bullet(Y)$, e portanto um mapa $H_n(f)\colon H_n(X) \to H_n(Y)$.

Na prática, a homologia de um complexo não é calculada diretamente a partir da sua definição, mas sim "quebrando" o complexo em dois mais simples e fazendo o cálculo a partir da homologia destes dois complexos "menores". O principal resultado para este cálculo é o seguinte lema, cuja demonstração é direta a partir das definições.

Lema 6.3 (Seqüência Exata Longa) *Seja*

$$0 \longrightarrow C'_\bullet \xrightarrow{f_\bullet} C_\bullet \xrightarrow{g_\bullet} C''_\bullet \longrightarrow 0$$

uma seqüência exata de complexos, i.e., mapas de complexos de modo que para cada i a seqüência

$$0 \longrightarrow C'_i \xrightarrow{f_i} C_i \xrightarrow{g_i} C''_i \longrightarrow 0$$

seja exata. Então existe uma seqüência exata longa

$$\begin{aligned}
\cdots \longrightarrow\ & h_i(C'_\bullet) \xrightarrow{h_i(f_\bullet)} h_i(C_\bullet) \xrightarrow{h_i(g_\bullet)} h_i(C''_\bullet) \\
\xrightarrow{\delta_i}\ & h_{i-1}(C'_\bullet) \xrightarrow{h_{i-1}(f_\bullet)} h_{i-1}(C_\bullet) \xrightarrow{h_{i-1}(g_\bullet)} h_{i-1}(C''_\bullet) \\
\xrightarrow{\delta_{i-1}}\ & h_{i-2}(C'_\bullet) \xrightarrow{h_{i-2}(f_\bullet)} h_{i-2}(C_\bullet) \xrightarrow{h_{i-2}(g_\bullet)} h_{i-2}(C''_\bullet) \longrightarrow \cdots
\end{aligned}$$

Os mapas δ_i são chamados **morfismos conectores** *e são definidos da seguinte forma: dado um elemento $[z] \in h_i(C''_\bullet)$ representado por $z \in \ker d''_i$, escolha $y \in C_i$ tal que $g_i(y) = z$; então como $g_{i-1}\big(d_i(y)\big) = 0$, existe um único $x \in C'_{i-1}$ tal que $f_{i-1}(x) = d_i(y)$, e definimos $\delta_i([z]) = [x]$, onde $[x]$ denota a imagem de x em $h_{i-1}(C'_\bullet)$.*

$$\begin{tikzcd}
 & y \in C_i \arrow[r, two heads, "g_i"] \arrow[d, "d_i"] & z \in C''_i \\
x \in C'_{i-1} \arrow[r, hook, "f_{i-1}"] & f_{i-1}(x) = d_i(y) \in C_{i-1} &
\end{tikzcd}$$

Para terminar esta seção, listamos uma condição suficiente para que dois morfismos de complexos induzam a mesma homologia.

Definição 6.4 Dois morfismos de complexos $f_\bullet$ and $g_\bullet$ de $(C_\bullet, d_\bullet)$ para $(C'_\bullet, d'_\bullet)$ são **homotópicos** se existem mapas $k_i\colon C_i \to C'_{i+1}$ tais que

$$f_i - g_i = d'_{i+1} \circ k_i + k_{i-1} \circ d_i$$

para todo i. Neste caso temos que $h_i(f_\bullet) = h_i(g_\bullet)$ para todo i.

7 Propriedades da Homologia

Para efetivamente calcular os grupos $H_n(X)$, precisamos introduzir uma espécie de "homologia relativa" a um subespaço:

Definição 7.1 Seja $A \subset X$. Como $C_n(A)$ é um subgrupo de $C_n(X)$ para todo n, temos uma seqüência exata de complexos

$$0 \to C_\bullet(A) \to C_\bullet(X) \to C_\bullet(X/A) \to 0$$

onde $C_n(X/A) \overset{\text{df}}{=} C_n(X)/C_n(A)$ e $\partial_{n-1}\colon C_n(X/A) \to C_{n-1}(X/A)$ são induzidos pelos morfismos bordo de $C_\bullet(X)$ e por simplicidade são denotados pelo mesmo símbolo. Definimos o **n-ésimo grupo de homologia de X relativo a A** como

$$H_n(X/A) \overset{\text{df}}{=} h_n\big(C_\bullet(X/A)\big)$$

Podemos interpretar esta situação relativa como a que obteríamos "reduzindo A a um único ponto" (um ponto gordo, é claro!). Por exemplo, se $\sigma\colon \Delta_1 \to X$ é um 1-simplexo singular com $\sigma(v_0), \sigma(v_1) \in A$, então $\partial_1\sigma = \sigma(v_1) - \sigma(v_0) \in C_0(A)$, que é 0 em $C_0(X/A)$, e portanto $[\sigma] \in C_1(X/A)$ satisfaz $[\sigma] \in \ker \partial_1$, mesmo que o caminho definido por σ não seja um laço em X. Mas σ é um "laço relativo a A".

A importância dos grupos de homologia relativa é que a partir da seqüência exata de complexos acima, obtemos (lema 6.3) uma seqüência exata longa

$$\begin{aligned} \cdots &\to H_2(A) \to H_2(X) \to H_2(X/A) \\ &\to H_1(A) \to H_1(X) \to H_1(X/A) \\ &\to H_0(A) \to H_0(X) \to H_0(X/A) \to 0 \end{aligned}$$

que fornece informações sobre os grupos $H_n(X)$ a partir dos grupos "menores" $H_n(A)$ e $H_n(X/A)$. Em muitos casos, as informações obtidas a partir da seqüência exata acima são suficientes para se calcular $H_n(X)$. Por exemplo, se A é um ponto (de verdade!) de X, então $H_n(A) = 0$ para $n \geq 1$ como pode ser verificado diretamente, e a seqüência acima mostra então que temos um isomorfismo $H_n(X) = H_n(X/A)$ para todo $n \geq 1$.

As situações mais interessantes são aquelas em que podemos dizer que alguns destes grupos são 0, e suspeitamos ser este o caso em que o espaço é homotópico a um ponto, por exemplo. Podemos fazer uma afirmação mais geral; para isto, considere os pares da forma (X, A) onde X é um espaço topológico e $A \subset X$. Um mapa entre dois pares (X, A) e (Y, B) é uma função contínua $f\colon X \to Y$ tal que $f(A) \subset B$. Nestas condições, temos que f induz um morfismo de grupos abelianos

$$H_n(f)\colon H_n(X/A) \to H_n(Y/B)$$

da maneira óbvia, fazendo dos H_n relativos um funtor. Exigimos que uma homotopia $h\colon [0,1] \times X \to Y$ entre dois mapas $f, g\colon (X, A) \to (Y, B)$ satisfaça a condição adicional $h(t, A) \subset B$ para todo $t \in [0,1]$. Agora podemos enunciar o

Teorema 7.2 (Invariância homotópica) *Se $f, g\colon (X, A) \to (Y, B)$ são homotópicos, então $H_n(f) = H_n(g)\colon H_n(X, A) \to H_n(Y, B)$. Em particular, se X é homotópico a um ponto então $H_n(X) = 0$ para todo $n \geq 1$.*

Prova Dado um n-simplexo singular $\sigma\colon \Delta_n \to X$, gostaríamos de mostrar que $f \circ \sigma$ e $g \circ \sigma$ são "equivalentes", isto é, diferem de um elemento em ∂_{n+1}. Isto é em geral impossível pois normalmente $\sigma \notin \ker \partial_n$, mas podemos fazer com que, para cada σ, $f \circ \sigma - g \circ \sigma$ esteja em $\operatorname{im} \partial_{n+1}$ a menos das bordas, que devem automaticamente se cancelar quando considerarmos todos os simplexos σ em um elemento de $\ker \partial_n$. Por exemplo, quando $X = \Delta_n$ e $Y = [0,1] \times \Delta_n$ e $h = \mathrm{id}$, queremos mostrar que a diferença de "simplexos" $\{0\} \times \Delta_n - \{1\} \times \Delta_n$ entre as faces de cima e de baixo do "prisma" Y (faça o desenho para $n = 2$) estão essencialmente na imagem de ∂_{n+1}, o que equivale a decompor o prisma em uma soma n-simplexos com sinais de modo que as "faces internas" se cancelem. Denotando por $w_i = (0, v_i) \in [0,1] \times \Delta_n$ e $w_i' = (1, v_i) \in [0,1] \times \Delta_n$, uma tal decomposição é dada por $\sum_{0 \leq i \leq n} (-1)^i [w_0, \ldots, w_i, w_i', \ldots, w_n']$ (desenhe os casos $n = 1$ e $n = 2$).

O caso geral pode ser obtido por composição: seja $h\colon [0,1] \times X \to Y$ uma homotopia entre f e g. Defina $k_n(\sigma) \overset{\text{df}}{=} \sum_{0 \leq i \leq n} (-1)^i \tau_i$ onde τ_i denota a composição

$$\Delta_{n+1} = [v_0, \ldots, v_{n+1}] \xrightarrow{\ell} [w_0, \ldots, w_i, w_i', \ldots, w_n'] \xrightarrow{\mathrm{id} \times \sigma} [0,1] \times X \xrightarrow{h} Y$$

(ℓ é o mapa linear preservando a ordem dos vértices). Agora é fácil mostrar que $k_n\colon C_n(X/A) \to C_{n+1}(Y/B)$ é uma homotopia algébrica no sentido da definição 6.4 e o resultado segue. $\square$

Um dos teoremas centrais para o cálculo dos grupos H_n é o

Teorema 7.3 (Excisão) *Seja (X, A) um par e seja $B \subset A$ tal que o fecho de B esteja contido no interior de A. Então a inclusão $(X - B, A - B) \hookrightarrow (X, A)$ induz um isomorfismo $H_n\big((X - B)/(A - B)\big) = H_n(X/A)$.*

PROVA (Very sketchy) Sejam U e V o interior de A e o complemento do fecho de B. Por hipótese, $U \cup V = X$. Agora se a imagem de todo simplexo singular $\sigma: \Delta_n \to X$ estivesse totalmente contido ou em U ou em V, o resultado seria imediato. A idéia, como antes, é mostrar que qualquer simplexo σ é "equivalente" à soma dos subsimplexos obtidos pela subdivisão baricêntrica de σ, novamente através de uma homotopia algébrica (quando $n = 2$, a subdivisão baricêntrica de Δ_2 consiste nos seis triângulos menores em que Δ_2 é dividido por suas medianas). Utilizando a compacidade de Δ_n mostra-se que cada σ é equivalente a uma iterada finita de subdivisões baricêntricas, cujos simplexos têm imagens totalmente contidas ou em U ou em V. A única dificuldade é definir de modo ordenado a subdivisão baricêntrica acima com sinais adequados para que as "faces internas" se cancelem, que é um verdadeiro "combinatorial mess". Detalhes podem ser encontrados em qualquer uma das referências abaixo. $\square$

Vamos ver na prática como aplicar os resultados acima.

Teorema 7.4 *Temos*

$$H_i(S^n) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{se } i = n \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

PROVA Indução em n, o caso $n = 0$ (ponto) sendo obtido por cálculo explícito. Seja A o hemisfério sul de S^n; como A é homotópico a um ponto, temos que $H_i(A) = 0$ para todo $i > 0$ e portanto da seqüência exata longa temos que $H_i(S^n) \cong H_i(S^n/A)$. Agora aplicamos a excisão com B sendo uma pequena calota próximo ao pólo sul. Como $(S^n - B, A - B)$ é homotópico a (D^n, S^{n-1}), temos que $H_i(S^n/A) \cong H_i(D^n, S^{n-1})$. Aplicando novamente a seqüência exata longa, desta vez para o par (D^n, S^{n-1}), e usando o fato que D^n é homotópico a um ponto e portanto $H_i(D^n) = 0$, temos que $H_i(D^n, S^{n-1}) \cong H_{i-1}(S^{n-1})$. Juntando tudo, temos

$$H_i(S^n) \cong H_{i-1}(S^{n-1})$$

e o resultado segue por indução. $\square$

Com isso, completamos a demonstração do teorema do ponto fixo de Brouwer em todas as dimensões. Hurray!

Uma análise cuidadosa (que deixamos como exercício, é claro) dos isomorfismos acima mostra que um gerador para $H_1(S^1)$ é o 1-simplexo $\tau_0 - \tau_1 + \tau_2$ onde os τ_i são os arcos de 120° determinados pelas raízes cúbicas da unidade, ou seja, o bordo de Δ_1. Admitindo este resultado, vamos mostrar que um gerador para $H_2(S^2)$ é o bordo de Δ_2. O último isomorfismo na demonstração acima foi o morfismo de conexão $H_2(D^2, S^1) \to H_1(S^1)$. Seja $\sigma: \Delta_2 \to D^2$ um 2-simplexo singular com $\delta_2(\sigma) = \tau_0 - \tau_1 + \tau_2$; observe que embora $\delta_2(\sigma) \neq 0$ em $C_1(D^2)$, temos $\delta_2(\sigma) = 0$ em $C_1(D^2/S^1)$. A descrição explícita do morfismo de conexão dado na seção anterior mostra que uma pré-imagem de $\tau_0 - \tau_1 + \tau_2$ é a classe de σ em $H_2(D^2, S^1)$. A excisão diz que podemos tomar como gerador de $H_2(S^2/A)$ o 2-simplexo singular $\sigma': \Delta_2 \to S^2$ cuja imagem cobre o hemisfério norte e cuja borda está em $A - B$. Finalmente o isomorfismo $H_2(S^2) \cong H_2(S^2/A)$ diz que um gerador de $H_2(S^2)$ é qualquer levantamento de σ', digamos a soma alternada das faces da imagem de um tetraedro cuja primeira face é σ' e cujas outras três faces estão em A.

Exercício 7.1 Calcule os grupos de homologia de $S^1 \vee S^1$ (mais conhecido como "figure 8" ou Pretzel) e do toro.

Exercício 7.2 Seja $f: S^2 \to S^2$ a rotação de 720° em torno de um eixo. Descreva explicitamente $H_2(f)$ em termos do gerador de $H_2(S^2) \cong \mathbb{Z}$.

Exercício 7.3 Prove a excisão para $n = 0, 1, 2$.

8 Referências

1. Greenberg, M., "Algebraic Topology", Benjamin-Cummings Publishing Company. Não tão completo quanto o Hatcher abaixo, mas uma excelente (e barata: US$ 32.75 na amazon) referência.
2. Hatcher, A., "Algebraic Topology", Cambridge University Press, disponível on-line (de grátis!) no endereço

   `http://www.math.cornell.edu/~hatcher/AT/ATpage.html`

   e também na forma de livro (preço legal: US$ 34,00 por 550 páginas!).
3. May, J. P., "A concise course in Algebraic Topology", Chicago Lectures in Mathematics. Outra pechincha (US$ 18.92 na amazon). Excelente livro, cobre coisas que o Hatcher não cobre e é bem menor! Mas só recomendável após a leitura de (parte) de um dos dois livros acima, pois é muito condensado para quem está aprendendo pela primeira vez.