Trigonometria

Exibimos aqui uma lista de exercícios de Geometria que podem ser resolvidos com o auxílio da Trigonometria. Alguns deles podem ser feitos sem o auxílio da Trigonometria, mas na maioria dos casos o seu uso é mais vantajoso.

Para quem não está familiarizado com as fórmulas de Trigonometria, aí vai um pequeno resumo:

- No triângulo retângulo ABC, retângulo em A, sendo $\beta = \angle ABC$ e $\gamma = \angle ACB = 90^\circ - \beta$, temos

$$\operatorname{sen}\beta = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{AC}{BC} \quad \cos\beta = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{BA}{BC} \quad \operatorname{tg}\beta = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}} = \frac{AC}{AB}$$

$$\operatorname{sen}\gamma = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{BA}{BC} \quad \cos\gamma = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{CA}{BC} \quad \operatorname{tg}\gamma = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}} = \frac{AB}{AC}$$

Veja que podemos concluir que

$$\operatorname{sen}(90^\circ - \beta) = \cos\beta \qquad \cos(90^\circ - \beta) = \operatorname{sen}\beta \qquad \operatorname{tg}(90^\circ - \beta) = \frac{1}{\operatorname{tg}\beta} \qquad \operatorname{tg}\beta = \frac{\operatorname{sen}\beta}{\cos\beta}$$

- Podemos calcular seno e co-seno de ângulos maiores que 90° utilizando as seguintes identidades:

$$\begin{array}{ll} \operatorname{sen}(180^\circ - \theta) = \operatorname{sen}\theta & \cos(180^\circ - \theta) = -\cos\theta \\ \operatorname{sen}(180^\circ + \theta) = -\operatorname{sen}\theta & \cos(180^\circ + \theta) = -\cos\theta \end{array}$$

- Podemos calcular seno e co-seno da soma e diferença de dois ângulos a partir de seus senos e co-senos:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(a+b) &= \operatorname{sen}a\cos b + \operatorname{sen}b\cos a \\ \operatorname{sen}(a-b) &= \operatorname{sen}a\cos b - \operatorname{sen}b\cos a \\ \cos(a+b) &= \cos a\cos b - \operatorname{sen}a\operatorname{sen}b \\ \cos(a-b) &= \cos a\cos b + \operatorname{sen}a\operatorname{sen}b \end{aligned}$$

- A partir das quatro fórmulas anteriores podemos calcular, por exemplo, a tangente da soma de dois ângulos:

$$\operatorname{tg}(a+b) = \frac{\operatorname{sen}(a+b)}{\cos(a+b)} = \frac{\operatorname{sen}a\cos b + \operatorname{sen}b\cos a}{\cos a\cos b - \operatorname{sen}a\operatorname{sen}b} = \frac{\frac{\operatorname{sen}a\cos b + \operatorname{sen}b\cos a}{\cos a\cos b}}{\frac{\cos a\cos b - \operatorname{sen}a\operatorname{sen}b}{\cos a\cos b}} = \frac{\operatorname{tg}a + \operatorname{tg}b}{1 - \operatorname{tg}a\operatorname{tg}b}$$

- Podemos transformar soma de duas funções circulares em produto de duas funções circulares e vice-versa. Por exemplo, digamos que queiramos transformar $\operatorname{sen}a\operatorname{sen}b$ em soma. Esta expressão aparece nas fórmulas de $\cos(a \pm b)$. Escrevendo as fórmulas, temos

$$\begin{aligned} \cos(a+b) &= \cos a\cos b - \operatorname{sen}a\operatorname{sen}b \\ \cos(a-b) &= \cos a\cos b + \operatorname{sen}a\operatorname{sen}b \end{aligned}$$

Para obtermos $\operatorname{sen}a\operatorname{sen}b$, basta subtrair uma equação da outra:

$$\cos(a-b) - \cos(a+b) = 2\operatorname{sen}a\operatorname{sen}b \iff \operatorname{sen}a\operatorname{sen}b = \frac{1}{2}\big(\cos(a-b) - \cos(a+b)\big)$$

E se quisermos, por exemplo, transformar $\operatorname{sen}u + \operatorname{sen}v$ em produto? Aí é só somar $\operatorname{sen}(a+b)$ e $\operatorname{sen}(a-b)$, obtendo

$$\operatorname{sen}(a+b) + \operatorname{sen}(a-b) = 2\operatorname{sen}a\cos b$$

Fazendo $u = a + b$ e $v = a - b$, obtemos $a = \frac{u+v}{2}$ e $b = \frac{u-v}{2}$. Logo

$$\operatorname{sen} u + \operatorname{sen} v = 2 \operatorname{sen}\left(\frac{u+v}{2}\right) \cos\left(\frac{u-v}{2}\right)$$

- Por fim, apresentamos a lei dos senos e a lei dos co-senos. No triângulo ABC, seja $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$, $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$ e $\angle C = \gamma$. O circunraio de ABC é R.

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{b}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{c}{\operatorname{sen}\gamma} = 2R$$
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

Exercícios

01. No triângulo ABC, $m(\hat{C}) = 100°$. Seja D um ponto pertencente a AC tal que $CD = BC$. Se $BD = AC$, calcule a medida do ângulo $\hat{A}$.

02. As alturas de um triângulo acutângulo ABC onde $AB > AC$ interceptam os lados BC, AC e AB nos pontos D, E e F respectivamente. Se EF intercepta BC no ponto P e a reta que passa por D e é paralela a EF intercepta AC e AB em Q e R respectivamente, seja N um ponto sobre o lado BC tal que $\angle NQP + \angle NRP < 180°$. Prove que $BN > CN$.

03. Seja $\triangle ABC$ isósceles de base BC. Sabendo que $m(\hat{A}) = 20°$, $m(D\hat{B}C) = 60°$ e $m(E\hat{C}B) = 50°$, sendo EC e BD duas cevianas, determine $m(B\hat{D}E)$.

04. Sejam M e N pontos médios dos lados AB e AC, respectivamente, do $\triangle ABC$. A bissetriz interna de $\angle BAC$ encontra o lado BC no ponto P. Demonstre que

$$\frac{1}{\operatorname{tg}\angle APM} + \frac{1}{\operatorname{tg}\angle APN} = \frac{2}{\operatorname{tg}(\angle BAC/2)}.$$

05. Um quadrilátero convexo está inscrito em uma circunferência de raio unitário. Demonstre que a diferença entre seu perímetro e a soma das diagonais é maior do que zero e menor do que 2.

06. O prolongamento da bissetriz AL do triângulo acutângulo ABC intercepta a circunferência circunscrita no ponto N. A partir do ponto L traçam-se perpendiculares LK e LM aos lados AB e AC, respectivamente. Prove que a área do triângulo ABC é igual a área do quadrilátero $AKNM$.

07. Dado um quadrilátero $ABCD$, o círculo que tangencia AD, DC e CB encontra estes lados em K, L e M, respectivamente. Seja N a intersecção de KM e a reta por L que é paralela a AD e seja P a intersecção de LN e KC. Mostre que $PL = PN$.

08. As retas tangentes ao circuncírculo do triângulo acutângulo ABC através de B e A cortam a tangente através de C em T e U, respectivamente. AT corta BC em P, e Q é o ponto de AP; BU corta CA em R, e S é o ponto médio de BR.

Prove que $\angle ABQ = \angle BAS$.

09. Seja $ABCD$ um paralelogramo de lados AB, BC, CD, DA e centro O tal que $\angle BAD < 90°$ e $\angle AOB > 90°$. Consideramos A_1 e B_1 pontos das semi-retas OA e OB, respectivamente, tais que A_1B_1 é paralelo a AB e $\angle A_1B_1C = \angle ABC/2$. Demonstre que A_1D é perpendicular a B_1C.

10. A circunferência inscrita no triângulo ABC é tangente aos lados BC, CA e AB nos pontos D, E e F, respectivamente. AD corta a circunferência num segundo ponto Q. Demonstrar que a reta EQ passa pelo ponto médio de AF se, e somente se, $AC = BC$.

11. As tangentes a uma circunferência de centro O, traçadas por um ponto exterior C, tocam a circunferência nos pontos A e B. Seja S um ponto qualquer da circunferência. As retas SA, SB e SC cortam o diâmetro perpendicular a OS nos pontos A', B' e C', respectivamente.

Prove que C' é o ponto médio de $A'B'$.

12. Seja I o incentro do triângulo ABC. A circunferência inscrita no triângulo ABC é tangente aos lados BC, CA e AB nos pontos K, L e M, respectivamente. A reta que passa por B, paralela ao segmento MK, intercepta as retas LM e LK nos pontos R e S, respectivamente. Prove que o ângulo $\angle RIS$ é agudo.

13. Seja P um ponto interior a um ângulo $\hat{A}$ dado. Mostre como construir uma corda BPC deste ângulo, passando por P, de modo que $\frac{1}{BP} + \frac{1}{CP}$ seja máximo.

14. Em um triângulo ABC, o ângulo $\angle BCA$ é obtuso e $\angle BAC = 2\angle ABC$. A reta por B perpendicular a BC intercepta AC em D. Seja M o ponto médio de AB. Prove que $\angle AMC = \angle BMD$.

15. Seja M um ponto no interior do triângulo ABC, tal que $\angle AMC = 90°$, $\angle AMB = 150°$ e $\angle BMC = 120°$. Os circuncentros dos triângulos AMC, AMB e BMC são P, Q e R, respectivamente. Prove que a área do triângulo PQR é maior do que a área do triângulo ABC.

16. Seja ABC um triângulo e A', B', C' pontos médios dos arcos BC, AC e AB do circuncírculo de ABC, respectivamente. As retas $A'B'$ e $A'C'$ interceptam o lado BC em M e N, respectivamente. Defina os pares de pontos P, Q e R, S analogamente. Prove que $MN = PQ = RS$ se, e somente se, ABC é equilátero.

17. No triângulo ABC, com $\angle BAC = 60°$, construímos uma paralela IF ao lado AC, onde F está sobre AB e I é o incentro do $\triangle ABC$.

O ponto P sobre BC é tal que $3BP = BC$. Mostre que $\angle BFP = \angle ABC/2$.

18. Sobre os lados de um triângulo ABC, são construídos, externamente, triângulos ABR, BCP, CAQ com $\angle CBP = \angle CAQ = 45°$, $\angle BCP = \angle ACQ = 30°$, $\angle ABR = \angle BAR = 15°$. Prove que $\angle QRP = 90°$ e $QR = RP$.

19. Sejam O e O_1 os centros do incírculo e do excírculo tangente ao lado BC do triângulo ABC. A mediatriz do segmento OO_1 intercepta as retas AB e AC nos pontos L e N, respectivamente. Sabendo que o circuncírculo do $\triangle ABC$ tangencia a reta LN, prove que $\triangle ABC$ é isósceles.

20. Calcule a área de um hexágono equilátero inscrito em uma semicircunferência de raio 1.

21. Seja ABC um triângulo acutângulo com circuncentro O. Seja PA uma altura do triângulo com P no lado BC.

Considere que $\angle BCA \geq \angle ABC + 30°$.

Prove que $\angle CAB + \angle COP < 90°$.

22. Num triângulo ABC, seja AP a bissetriz de $\angle BAC$ com P no lado BC, e seja BQ a bissetriz de $\angle ABC$ com Q no lado CA.

Sabemos que $\angle BAC = 60°$ e que $AB + BP = AQ + QB$.

Quais são os possíveis valores dos ângulos do triângulo ABC?

23. Uma circunferência de centro O está inscrita no quadrilátero $ABCD$. Mostre que se os perímetros dos triângulos AOB, BOC e COD são iguais então $ABCD$ é um losango.

24. Seja M e N pontos sobre os lados AB e BC do paralelogramo $ABCD$ tais que $AM = NC$. As retas AN e CM se encontram no ponto Q. Mostre que DQ bissecta o ângulo D do paralelogramo.

25. São dados um ângulo de vértice O e um ponto A interior ao ângulo. Os pontos M e N pertencem aos lados do ângulo e são tais que $\angle OAM = \angle OAN$. Mostre que todos as retas MN nestas condições passam por um mesmo ponto ou são paralelas entre si.

26. Considere o triângulo ABC. Constrói-se um quadrado exterior a ABC tal que AB é um de seus lados. Seja O o centro do quadrado e M e N os pontos médios de BC e AC, respectivamente. Dados $BC = a$ e $AC = b$, encontre o valor máximo de $OM + ON$, quando o ângulo $\angle C$ varia.

27. Seja Γ uma circunferência de centro O tangente aos lados AB e AC do triângulo ABC nos pontos E e F. A reta perpendicular ao lado BC por O intercepta EF no ponto D. Mostre que A, D e M (ponto médio de BC) são colineares.

28. Em um triângulo ABC a bissetriz do ângulo A intercepta o lado BC no ponto A_1 e o círculo circunscrito no ponto A_2. Os pontos B_1, B_2 e C_1, C_2 são definidos analogamente. Prove que

$$\frac{AA_1}{BA_2+CA_2}+\frac{BB_1}{CB_2+AB_2}+\frac{CC_1}{AC_2+BC_2}\geq\frac{3}{4}$$