Semana Olímpica 2014

Nivel 2: Um Princípio Extremamente Útil.

Régis Prado Barbosa

**1.** Num torneio de tênis, todos jogam contra todos. Após os jogos, cada jogador faz uma lista com os nomes dos jogadores que:

i) perderam dele.

ii) perderam de algum jogador que perdeu dele.

Prove que algum dos jogadores tem os nomes de todos os outros jogadores em sua lista.

**2.** Dado um conjunto finito de retas no plano sem duas retas paralelas e com a propriedade de que se duas retas passam por certo ponto então pelo menos mais uma reta passa por esse ponto, mostre que todas as retas passam por um mesmo ponto.

**3.** É dado um conjunto $A$ com $2n+1$ pessoas e tal que para qualquer subconjunto $B$ de $A$ formado por $n$ pessoas existe uma pessoa fora de $B$ que conhece todas as pessoas de $B$. Mostre que alguma pessoa de $A$ conhece todas as outras pessoas de $A$.

**4.** Um subconjunto de certo conjunto de $n$ pontos num plano é dito $bemloco$ se não houver três pontos do subconjunto formando um triângulo equilátero. Mostre que há um subconjunto bemloco com pelo menos $\sqrt{n}$ pontos.

**5.** Há três escolas com $n$ estudantes cada. Cada estudante conhece exatamente $n+1$ estudantes das outras duas escolas. Mostre que é possível tomar três estudantes, um estudante de cada escola, que se conhecem mutuamente.

**6.** Há dois conjuntos, um de mulheres e outro de possíveis maridos. Cada mulher tem uma lista de maridos com aceitaria casar. Mostre que todas as mulheres podem casadas com maridos diferentes se, e somente se, para qualquer subconjunto de mulheres a união dos maridos com quem elas aceitariam casar-se tem pelo menos a quantidade de elementos no subconjunto, ou seja, a união das listas tem quantidade de maridos suficiente para os casamentos.

**7.** Considere cinco pontos no plano de maneira que cada triângulo com vértices em três desses pontos possui área menor ou igual a $1$. Prove que os cinco pontos podem ser cobertos por um trapézio de área no máximo $3$.

**8.** São dados $n \geq 3$ pontos no plano tais que a área de um triângulo formado por quaisquer três deles é no máximo 1. Prove que os $n$ pontos estão em um triângulo de área no máximo $4$.

**9.** Dado um número $n \geq 3$, considere $n$ pontos distintos sobre a borda de um círculo, rotulados de 1 até $n$. Determine o número máximo de cordas fechadas $[i-j]$, $i \neq j$, tendo interseção não vazia duas a duas.

**10.** Uma faixa de largura $w$ é o conjunto de todos os pontos que estão sobre ou entre duas retas paralelas cuja distância entre si é $w$. Seja $S$ um conjunto de $n$ $(\geq 3)$ pontos no plano tais que quaisquer três pontos de $S$ podem ser cobertos por uma faixa de largura 1. Prove que $S$ pode ser coberto por uma faixa de largura 2.