Vingança Olímpica 2011

31 de janeiro de 2011

Duração: 4:30min

1. Sendo $p, q, r, s, t \in \mathbb{R}_+^*$, e sabendo que

$$p^2 + pq + q^2 = s^2$$
$$q^2 + qr + r^2 = t^2$$
$$r^2 + rp + p^2 = s^2 - st + t^2$$

   Prove que

$$\frac{s^2 - st + t^2}{s^2t^2} = \frac{r^2}{q^2t^2} + \frac{p^2}{q^2s^2} - \frac{pr}{q^2ts}$$

2. Seja p um primo fixo. Determine todos os inteiros positivos m, em função de p, tais que existem $a_1, a_2, ..., a_p \in \mathbb{Z}$ satisfazendo

$$m \mid a_1^p + a_2^p + ... + a_p^p - (p+1)$$

3. Seja E um conjunto infinito de elipses congruentes no plano e r uma reta fixa. Sabe-se que toda reta paralela a r intersecta pelo menos uma elipse pertencente a E. Prove que existem infinitas triplas de elipses que pertencem a E tais que existe uma reta que intersecta a tripla de elipses.

4. Seja $ABCD$ um quadrilátero inscrito em uma circunferência Γ. Sejam r e s as tangentes a Γ em B e C, respectivamente, M a intersecção entre as retas r e AD e N a intersecção entre as retas s e AD. Sejam ainda E a intersecção entre as retas BN e CM, F a intersecção entre as retas AE e BC e L o ponto médio de BC. Prove que o circuncírculo do triângulo DLF é tangente a Γ.

5. Sendo $n \in \mathbb{N}$ e $z \in \mathbb{C}^*$, prove que

$$|ne^z - \sum_{j=1}^{n}(1 + \frac{z}{j^2})^{j^2}| < \frac{1}{3}e^{|z|}(\frac{\pi|z|}{2})^2$$