Vingança Olímpica

PROBLEMA 1: É dado o triângulo ABC escaleno de circuncentro O e circunferência circunscrita Γ. Sejam D, E e F os pontos médios de BC, CA e AB, respectivamente. Sejam $\{M\} = OE \cap AD$ e $\{N\} = OF \cap AD$. Além disso, $\{P\} = CM \cap BN$. Por fim, $\{X\} = AO \cap PE$ e $\{Y\} = AP \cap OF$. Seja ainda r a tangente a Γ passando por A. Mostre que as retas r, EF e XY concorrem.

PROBLEMA 2: Prove que:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \arctan\left(1 - sen^2 x cos^2 x\right) dx = \frac{\pi^2}{4} - \pi arctan\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}$$

PROBLEMA 3: Seja ABC um triângulo e I o seu incentro. Sejam ω_A, ω_B e ω_C os incírculos dos triângulos BIC, CIA e AIB, respectivamente. Considere também T o ponto de tangência entre ω_A e BC. Prove que a outra tangente comum interna aos círculos ω_B e ω_C passa pelo ponto T.

PROBLEMA 4: Para cada $k \in \mathbb{N}$, seja $d_i(k)$ o número de divisores de k que são maiores que i. Seja também

$$f(n) = \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n^2}{2} \rfloor} d_i(n^2 - i) - 2\sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} d_i(n - i).$$

Encontre todos os números $n \in \mathbb{N}$ tais que $f(n)$ é um quadrado perfeito.

PROBLEMA 5: Secco e Bolão comem uma pizza de *mozzarela* de $2n$ pedaços.Cada pedaço tem de 1 a $2n$ azeitonas distribuídas de maneira arbitrária de tal forma que cada pedaço tem um número distinto de azeitonas.Secco come o primeiro pedaço e os jogadores jogam alternadamente do seguinte modo: cada jogador só pode comer um pedaço que é vizinho de algum já comido. Ocorre que nenhum dos dois gosta de azeitonas e portanto querem escolher pedaços de forma a minimizar o total de azeitonas comidas.Para cada arranjo σ das azeitonas, seja $s(\sigma)$ o mínimo de azeitonas que Secco consegue pegar, considerando que ambos jogam da melhor maneira possível.Seja $S(n)$ o máximo dos $s(\sigma)$, considerando todos os arranjos possíveis.

a) Prove que $n^2 - 1 + \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \leq S(n) \leq n^2 + \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ para todo $n \geq 1$

b) Prove que $S(n) = n^2 - 1 + \frac{n}{2}$ para todo n par

PROBLEMA 6: Tome $a, n \in \mathbb{Z}_+^*$. Define-se a na base n-iterada indutivamente: escrevemos a na base n, i.e., como soma de termos na forma $k_t n^t$, com $0 \leq k_t < n$. Para cada expoente t, escrevemos t na base n-iterada, até não restar nenhum número maior que n na representação, como a seguir:

$$1309 = 3^6 + 2.3^5 + 1.3^4 + 1.3^2 + 1.3 + 1$$
$$= 3^{2.3} + 2.3^{3+2} + 1.3^{3+1} + 1.3^2 + 1$$

Tome $x_1 \in \mathbb{Z}_+^*$ arbitrário. Definimos x_n recursivamente, da seguinte forma: se $x_{n-1} > 0$, escrevemos x_{n-1} na base n-iterada, trocamos todos (até os expoentes!) os números n por $n+1$ de modo a obter o sucessor de x_n. Se $x_{n-1} = 0$ então $x_n = 0$.

Exemplo:

$x_1 = 2^{2^2+2+1} + 2^{2+1} + 2 + 1$
$\Rightarrow x_2 = 3^{3^3+3+1} + 3^{3+1} + 3$
$\Rightarrow x_3 = 4^{4^4+4+1} + 4^{4+1} + 3$
$\Rightarrow x_4 = 5^{5^5+5+1} + 5^{5+1} + 2$
$\Rightarrow x_5 = 6^{6^6+6+1} + 6^{6+1} + 1$
$\Rightarrow x_6 = 7^{7^7+7+1} + 7^{7+1}$
$\Rightarrow x_7 = 8^{8^8+8+1} + 7.8^8 + 7.8^7 + 7.8^6 + ... + 7$
.
.
.

Prove que $\exists N : x_N = 0$.

Boa prova!

Obs: não é permitido o uso de calculadoras, computadores e ábacos.
Também não será permitido o consumo de Coca-Cola dentro do local de prova!