Vingança Olímpica 2010

Duração da prova: 5 horas
Instruções:
.É permitido o uso de régua, esquadro e compasso.
.Quaisquer dúvidas quanto aos enunciados devem ser questionadas através de uma folha em branco constando o nome do participante.

PROBLEMA 1:
Prove que o número de ternas ordenadas (x, y, z) tais que $(x+y+z)^2 \equiv axyz (mod p)$, onde $mdc(a, p)=1$ e p é primo é p^2+1 .

PROBLEMA 2:
Joaquim, José e João participam de uma seita do triângulo **ABC**. Sabe-se que o triângulo **ABC** é um triângulo qualquer. Segundo os dogmas da seita, quando eles formarem um triângulo semelhante ao **ABC**, eles se tornarão imortais. Entretanto, existe um pré-requisito: cada pessoa deve representar um dos pontos do triângulo, no caso Joaquim será o ponto **A**, José o ponto **B** e João o ponto **C**. Dessa forma, eles devem formar o triângulo semelhante ao **ABC** nessa ordem. Suponha que os três sejam pontos no plano euclidiano. Como eles estão agitados para conseguir a imortalidade, eles agem da seguinte forma: em cada instante **t**, Joaquim, por exemplo, se moverá com velocidade constante **v** para o ponto, no mesmo semi-plano determinado pela reta que liga os outros dois pontos, que formaria o triângulo semelhante a **ABC** na ordem desejada, e os outros participantes também agem da mesma forma. Sabendo que a velocidade dos três é a mesma e que eles vivem uma quantidade finita, mas suficientemente grande de tempo, determine se eles podem virar imortais.
Obs.: os três inicialmente não "estão" colineares.

PROBLEMA 3:
Prove que existe um conjunto S de retas em um espaço de três dimensões que satisfaz às seguintes propriedades:

i)Para cada ponto P no espaço, existe uma única reta de S que contem P.
ii)Quaisquer duas retas de S não são paralelas.

PROBLEMA 4:
Sejam a_n, b_n duas sequências definidas pelas condições abaixo:

i) $a_1=1$
ii) $a_n+b_n=6\text{n}-1$
iii) a_{n+1} é o menor inteiro positivo diferente de $a_{1,} a_{2,} \ldots, a_n, b_{1,} b_{2,} \ldots, b_n$.

Determine a_{2009} .

PROBLEMA 5:

Secco e Ramon estão alcoolizados na reta real nos pontos inteiros **a** e **b**, respectivamente. A nossa reta real é um tanto especial, pois o intervalo $(-\infty,0)$ é banhado por um mar de lava. Sabendo disso e pelo fato de estarem alcoolizados, eles decidem jogar o seguinte jogo: inicialmente, eles escolhem um número inteiro $k>1$ usando um dado infinitamente grande, para depois começarem a jogar. Na primeira rodada, cada jogador escreve o ponto **h** em que ele deseja ir.Após isso, eles jogam uma moeda. Se a moeda der cara, eles vão para os pontos desejados, e se a moeda der coroa, eles vão para os pontos **2g – h**, onde **g** é o ponto em que cada jogador estava (no inicial seriam **a** e **b**) antes de começar a rodada. Eles repetem esse processo nas demais rodadas, e o jogo termina quando um dos jogadores está em um ponto exatamente **k** vezes maior que o outro (se os dois jogadores terminarem no ponto 0, o jogo termina). Determine em função de **k**, os valores iniciais inteiros **a** e **b** tais que Secco e Ramon tenham uma estratégia vencedora para terminar o jogo sem morrer.
Obs.: Se um dos jogadores cair na lava, ele morre e os dois perdem o jogo.

PROBLEMA 6:

Seja **ABC** um triângulo e Γ seu circuncírculo. Sejam também pontos **D**, **F**, **G**, **E**, nessa ordem no arco **BC** de Γ que não contem **A** de modo que **<BAD = <CAE** e **<BAF = <CAG**. Sejam **D'**, **F'**, **G'** e **E'** as interseções de **AD**, **AF**, **AG** e **AE** com **BC**, respectivamente. Sejam **X** a interseção de **DF'** com **EG'**, **Y** a interseção de **D'F** com **E'G**, **Z** a interseção de **D'G** com **E'F** e **W** a interseção de **EF'** com **DG'**. Prove que **X**,**Y** e **A** são colineares, assim como **W**,**Z** e **A**, e também prove que **<BAX = < CAZ**.