XI Vingança Olímpica

XV Semana Olímpica – Maceió, AL

26 de janeiro de 2012

• Esta prova segue o Compromisso com a Integridade Acadêmica
Duração: 5:30min

1. Sejam a e b números reais. Seja $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Diz-se que f é "semimonótona por partes"**(smp)** se, e somente se, $[a;b]$ pode ser expresso como $[c_0;c_1] \cup [c_1;c_2] \cup \ldots \cup [c_{n-1};c_n]$ de modo que $c_0 < c_1 < \ldots < c_n$ e que, para todo $i \in \{0,1,2,\ldots,n-1\}$, valha:

   • $c_i < x < c_{i+1} \Rightarrow f(c_i) < f(x) < f(c_{i+1})$

   ou

   • $c_i < x < c_{i+1} \Rightarrow f(c_i) > f(x) > f(c_{i+1})$

   Se $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ contínua é tal que a todo valor $v \in \mathbb{R}$ corresponde um número finito de pontos em $[a;b]$ com imagem v, mostre que f é **smp**.

2. Define-se $(x_1,x_2,\ldots,x_n)\ \Delta\ (y_1,y_2,\ldots,y_n) = (\sum_{i=1}^{n} a_i b_{2-i}, \sum_{i=1}^{n} a_i b_{3-i}, \ldots, \sum_{i=1}^{n} a_i b_{n+1-i})$, onde os índices são considerados módulo n.

   Além disso, se v é um vetor, define-se também $v^k = v$, se $k = 1$, ou $v^k = v\ \Delta\ v^{k-1}$, caso contrário. Prove que se $(x_1,x_2,\ldots,x_n)^k = (0,0,...,0)$, para algum k natural, então $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$.

3. No reino de Mittenpunkt, existem várias cidades e estradas de mão dupla que conectam algumas destas cidades entre si, de modo que há no máximo uma estrada conectando duas cidades. Os Mittenpunktianos são muito supersticiosos, e receberam a profecia de que no ano de 2012 o mundo iria acabar, a não ser que o reino fosse dividido em dois subreinos A e B, e todas as estradas que conectam A e B fossem destruídas. Além disso, após a destruição, deve-se cumprir a condição de que se C é uma cidade qualquer, tanto de A quanto de B, então C está conectada a uma quantidade par de cidades. Mostre que é possível evitar o caos e a destruição terrena.

4. Dizemos que dois conjuntos de inteiros positivos S, T são k*-sets* se a soma das i-ésimas potências dos elementos de S é igual a soma das i-ésimas potências dos elementos de T, para cada $i = 1,2,\ldots,k$. Dado k, prove que existem infinitos números N tais que $\{1,2,\ldots,N^{k+1}\}$ pode ser particionado em N subconjuntos, todos sendo k*-sets* uns aos outros.

5. Sejam $x_1,x_2,\ldots,x_n$ números reais positivos. Prove que

$$\sum_{cyc} \frac{1}{x_i^3 + x_{i-1}x_i x_{i+1}} \le \sum_{cyc} \frac{1}{x_i x_{i+1}(x_i + x_{i+1})}$$

6. Seja ABC um triângulo acutângulo cujo incentro é I, ortocentro é H e circuncentro é O. O incírculo Γ de ABC tangencia os lados BC, CA e AB em D, E e F, respectivamente. Sejam $P = DF \cap AC$, $Q = EF \cap BC$ e ω_1 e ω_2 circunferências centradas em P e Q cujos raios medem PE e QD, respectivamente. Se r é o eixo radical de ω_1 e ω_2, prove que $r \perp IH$ se, e somente se, $IO = OH$.