Vingança Olímpica

Tempo: 4h30min

2 de Fevereiro de 2015

Problema 1

Para $n \in N$, defina $P(n)$ como o produto dos fatores primos distintos de n e $P(1) = 1$.

Dado $a_0 \in N$ e $a_{k+1} = a_k + P(a_k)$. Prove que existe k tal que $\frac{a_k}{P(a_k)} = 2015$.

Problema 2

Sejam $v = (a, b, c, d) \in N^4$, $\Delta(v) = (|a - b|, |b - c|, |c - d|, |d - a|$ e $\Delta^k(v) = \Delta(\Delta^{k-1}(v))$, onde $\Delta^1(v) = \Delta(v)$.

Defina $f(v) = \min\{k \in N : \Delta^k(v) = (0, 0, 0, 0)\}$ e $\max(v) = \max\{a, b, c, d\}$.

Prove que: $f(v) < 1000. \log(\max(v))$ para todo v suficientemente grande e que $\frac{1}{1000}. \log(\max(v)) < f(v)$ para infinitos v.

Problema 3

Para todo n natural, existe k_n tal que $n|k_n$ e k_n só contem 0's e 1's em sua representação decimal.

Seja $f(n)$ a menor quantidade de dígitos 1 de k_n.

Determine se existe uma constante C para a qual $f(n) < C$ para todo n natural.

Problema 4

Considere um jogo nos pontos inteiros da reta real, onde um Anjo tenta fugir de um Diabo.

É escolhido um inteiro positivo k, o Anjo e o Diabo jogam alternadamente. Inicialmente, nenhuma casa está interditada. O Anjo, no ponto A, pode se deslocar para qualquer ponto P tal que $|AP| \leq k$ desde que P não esteja interditado; o Diabo pode interditar um ponto qualquer.

O Anjo perde se não consegue mais mover e ganha se não perder em tempo finito.

Defina $f(k)$ como a menor quantidade de jogadas do Diabo tal que ele consegue ganhar.

Prove que: $\frac{1}{2}.k.\log_2(k)(1 + o(1)) \leq f(k) \leq k.\log_2(k)(1 + o(1))$.

(Dizemos que $l(x) = k(x)(1 + o(1))$ se $\lim_{x\to\infty} \frac{k(x)}{l(x)} = 1$)

Problema 5

Dado um triângulo $A_1A_2A_3$, seja a_i o lado oposto a A_i onde os índices destes são vistos $mod.3$. Seja $D_1 \in a_1$. Para $D_i \in a_i$, defina ω_i como o incírculo do triângulo de lados formados pelas retas a_i, a_{i+1} e A_iD_i e, assim, $D_{i+1} \in a_{i+1}$ com $A_{i+1}D_{i+1}$ tangente a ω_i. Prove que o conjunto $S = \{D_i : i \in N\}$ é finito.