

XXI OLIMPIÁDA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA
Primeira Fase – Nível 2

1ª. Fase Olimpíada Regional
BA - ES - GO - RJ - RN - RS - SC - SP

- A duração da prova é de 3 horas.
- Não é permitido o uso de calculadoras nem consulta a notas ou livros.
- Você pode solicitar papel para rascunho.
- Entregue apenas a folha de respostas.

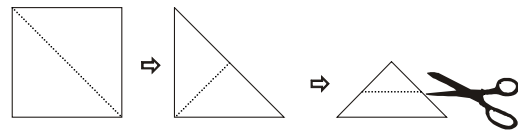
01. Um pequeno caminhão pode carregar 50 sacos de areia ou 400 tijolos. Se foram colocados no caminhão 32 sacos de areia, quantos tijolos pode ainda ele carregar?

- A) 132 B) 144 C) 132 D) 140 E) 148

02. Em um hotel há 100 pessoas. 30 comem porco, 60 comem galinha e 80 comem alface. Qual é o maior número possível de pessoas que não comem nenhum desses dois tipos de carne?

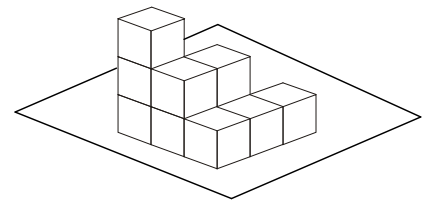
- A) 10 B) 20 C) 30 D) 40 E) 50

03. Uma folha quadrada foi dobrada duas vezes ao longo de suas diagonais conforme ilustração ao lado, obtendo-se um triângulo isósceles. Foi feito um corte na folha dobrada, paralelo à base desse triângulo, pelos pontos médios dos outros lados. A área do buraco na folha corresponde a que fração da área da folha original ?



- A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{6}$ C) $\frac{3}{8}$ D) $\frac{3}{4}$ E) $\frac{1}{4}$

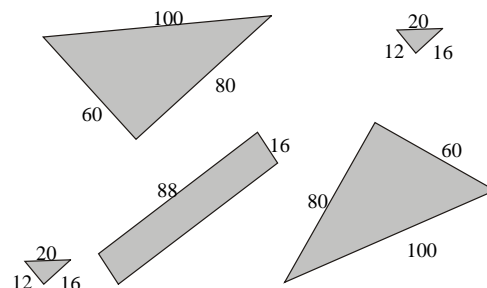
04. Vários caixotes cúbicos de plástico azul ficaram armazenados ao ar livre, na posição indicada na figura ao lado, na qual apenas um dos caixotes não é visível. Com o tempo, o plástico exposto ao ar perdeu sua cor, tornando-se cinza. Ao desfazer a pilha, verificaremos que o número de caixotes com três faces azuis e três cinzentas será:



- A) 4 B) 5 C) 3 D) 2
 E) 1

05. No desenho ao lado estão representados quatro triângulos retângulos e um retângulo, bem como suas medidas.

Juntando todas essas figuras, podemos construir um quadrado. O lado desse quadrado irá medir



- A) 88 cm B) 100 cm C) 60 cm

D) 96 cm E) 80 cm

06. Contando-se os alunos de uma classe de 4 em 4 sobram 2 e contando-se de 5 em 5 sobra 1. Sabendo-se que 15 alunos são meninas e que nesta classe o número de meninas é maior que o número de meninos, o número de meninos nesta classe é igual a :

A) 7 B) 8 C) 9 D) 10 E) 11

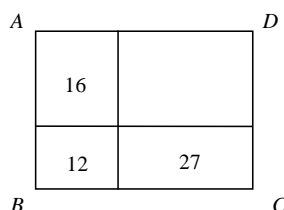
07. O quociente de 50^{50} por 25^{25} é igual a :

A) 25^{25} B) 10^{25} C) 100^{25} D) 2^{25} E) 2×25^{25}

08. Qual o 1999º algarismo após a vírgula na representação decimal de $\frac{4}{37}$?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 7 E) 8

09. Um retângulo $ABCD$ está dividido em quatro retângulos menores. As áreas de três deles estão na figura abaixo. Qual é a área do retângulo $ABCD$?



A) 80 B) 84 C) 86 D) 88 E) 91

10. Em um aquário há peixes amarelos e vermelhos: 90% são amarelos e 10% são vermelhos. Uma misteriosa doença matou muitos peixes amarelos, mas nenhum vermelho. Depois que a doença foi controlada verificou-se que no aquário, 75% dos peixes vivos eram amarelos. Aproximadamente, que porcentagem dos peixes amarelos morreram?

A) 15% B) 37% C) 50% D) 67% E) 84%

11. Pedro saiu de casa e fez compras em quatro lojas, cada uma num bairro diferente. Em cada uma gastou a metade do que possuía e a seguir, ainda pagou R\$ 2,00 de estacionamento. Se no final ainda tinha R\$ 8,00, que quantia tinha Pedro ao sair de casa?

A) R\$ 220,00 B) R\$ 204,00 C) R\$ 196,00 D) R\$ 188,00 E) R\$ 180,00

12. Quantos são os possíveis valores inteiros de x para que $\frac{x+99}{x+19}$ seja um número inteiro?

A) 5 B) 10 C) 20 D) 30 E) 40

13. A diferença entre a maior raiz e a menor raiz da equação $(2x - 45)^2 - (x - 21)^2 = 0$ é:

- A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

14. Uma bola de futebol é feita com 32 peças de couro. 12 delas são pentágonos regulares e as outras 20 são hexágonos também regulares. Os lados dos pentágonos são iguais aos dos hexágonos de forma que possam ser costurados. Cada costura une dois lados de duas dessas peças.

Quantas são as costuras feitas na fabricação de uma bola de futebol?

- A) 60 B) 64 C) 90 D) 120 E) 180

15. Hoje, 12/6/1999, Pedro e Maria fazem aniversário. No mesmo dia em 1996, a idade de Pedro era $\frac{3}{4}$ da idade de Maria. No mesmo dia em 2002, a idade de Pedro será igual à de Maria quando ele tinha 20 anos. Quantos anos Maria está fazendo hoje?

- A) 30 B) 31 C) 32 D) 33 E) 34

16. Uma caixa contém 100 bolas de cores distintas. Destas, 30 são vermelhas, 30 são verdes, 30 são azuis e entre as 10 restantes, algumas são brancas e outras são pretas. O menor número de bolas que devemos tirar da caixa, sem lhes ver a cor, para termos a certeza de haver *peelo menos* 10 bolas da mesma cor é:

- A) 31 B) 33 C) 35 D) 37 E) 38

17. Quantos são os triângulos que possuem medidas dos seus lados expressas por números inteiros e tais que a medida do maior lado seja igual a 11 ?

- A) 10 B) 11 C) 12 D) 24 E) 36

18. Os pontos S , T e U são os pontos de tangência do círculo inscrito no triângulo PQR sobre os lados RQ , RP e PQ respectivamente. Sabendo que os comprimentos dos arcos TU , ST e US estão na razão $TU : ST : US = 5 : 8 : 11$, a razão $\angle TPU : \angle SRT : \angle UQS$ é igual a :

- A) 7 : 4 : 1 B) 8 : 5 : 2 C) 7 : 3 : 2 D) 11 : 8 : 5 E) 9 : 5 : 1

19. Aos vértices de um cubo são atribuídos os números de 1 a 8 de modo que os conjuntos dos números correspondentes aos vértices das seis faces são $\{1, 2, 6, 7\}$, $\{1, 4, 6, 8\}$, $\{1, 2, 5, 8\}$, $\{2, 3, 5, 7\}$, $\{3, 4, 6, 7\}$ e $\{3, 4, 5, 8\}$. O vértice atribuído ao número 6 está mais longe do vértice de número

- A) 1 B) 3 C) 4 D) 5 E) 7

20. Com os 5 números ímpares entre -5 e 4 e com os 5 números pares entre -5 e 4 são formados 5 pares de números. Se N é a soma dos produtos, obtidos em cada par de números, o valor mínimo possível de N é igual a :

- A) -41 B) -40 C) -28 D) -10 E) 0

GABARITO

Segundo Nível (7^a. e 8^a. séries)

1) B	6) E	11) D	16) E
2) D	7) C	12) C	17) E
3) E	8) B	13) A	18) A
4) A	9) E	14) C	19) D
5) E	10) D	15) B	20) B

RESUMO DAS SOLUÇÕES

1) 1 saco = 8 tijolos. Se o caminhão pode carregar ainda 18 sacos então pode carregar $18 \times 8 = 144$ tijolos.

2) Supondo que todos os que comem galinha também comem porco então 40 pessoas, no máximo não comem nenhum desses dois tipos de carne.

3) O triângulo retirado tem um quarto da área do triângulo isósceles. Abrindo a folha, vemos essa situação reproduzida, logo o buraco em forma de quadrado tem um quarto da área do quadrado original.

4) Observando a figura, vemos 4 cubos com exatamente 3 faces livres de contato.

5) A soma das áreas das partes é 6 400. Portanto, o quadrado tem lado $\sqrt{6400} = 80$.

6) O número de alunos é pelo menos 15 e não mais que 29. Os únicos números neste intervalo que deixam resto igual a 2 quando divididos por 4 são 18, 22 e 26. Destes, o único que deixa resto igual a 1 quando dividido por 5 é 26 e o número de meninos é $26 - 15 = 11$.

$$7) \frac{50^{50}}{25^{25}} = \frac{(2 \times 5^2)^{50}}{(5^2)^{25}} = \frac{2^{50} \times 5^{100}}{5^{50}} = 2^{50} \times 5^{50} = (2^2 \times 5^2)^{25} = 100^{25}$$

8) A fração dada é equivalente a 0,108108108... assim, o 1999^o algarismo é 1.

9) Se dois retângulos possuem mesma altura então a razão entre suas áreas é igual à razão entre suas bases. Se dois retângulos possuem mesma base, então a razão entre suas áreas é igual à razão entre suas alturas. Isto permite concluir que o retângulo grande tem base $4 + 9 = 13$, e altura $3 + 4 = 7$. Sua área é, portanto, $13 \times 7 = 91$.

10) Imagine um aquário com 100 peixes sendo $A = 90$ e $V = 10$. Se x peixes amarelos morreram e depois ainda havia 75% de peixes amarelos no aquário, temos que

$90 - x = \frac{75}{100}(100 - x)$, o que dá $x = 60$. Se morreram 60 dos 90 peixes amarelos, a mortandade foi de $\frac{2}{3}$, ou seja, aproximadamente 67%.

11) Faça as contas de trás para frente: $(8 + 2).2 = 20$, $(20 + 2).2 = 44$, $(44 + 2).2 = 92$ e $(92 + 2).2 = 188$.

12) $\frac{x+99}{x+19} = 1 + \frac{80}{x+19}$. Este número é inteiro se, e somente se, $x + 19$ for divisor de 80. Como 80 tem 20 divisores inteiros, então existem 20 valores de x .

13) Fatorando, obtemos $y = (3x - 66)(x - 24)$. As raízes são 22 e 24.

14) As figuras possuem um total de $12 \times 5 + 20 \times 6 = 180$ lados. As costuras são 90.

15) Sejam: p a idade de Pedro e $p + d$ a de Maria. A primeira fornece a equação $p - 3 = \frac{3}{4}(p + d - 3)$ e a segunda, $p + 3 = 20 + d$. Resolvendo o sistema, obtemos

$$d = 7, p = 24 \text{ e } p + d = 31.$$

16) Claramente, 37 bolas não são suficientes uma vez que entre elas podem estar as 10 bolas brancas e pretas e 9 de cada uma das outras. Por outro lado, 38 bolas garantem que temos pelo menos 28 bolas que não são nem brancas e nem pretas e uma vez que $28 = 3 \cdot 9 + 1$ pelo Princípio da Casa dos Pombos temos certamente 10 bolas da mesma cor.

17) Sejam a , b e c as medidas dos três lados tais que $a \leq b \leq c \leq 11$. Então $6 \leq b \leq 11$ e $c - b \leq a \leq b$. A medida em que o valor de b decresce de 1, o conjunto dos valores possíveis de a diminui 2 unidades. Quando $b = 11$, temos $1 \leq a \leq 11$. Daí o número total de triângulos é $11 + 9 + 7 + 5 + 3 + 1 = 36$.

18) Seja O o centro do círculo, e observemos que $5 + 8 + 11 = 24$, $360 : 24 = 15$, e daí, $\angle TOU = 5 \times 15^\circ = 75^\circ$, $\angle SOT = 8 \times 15^\circ = 120^\circ$ e $\angle UOS = 11 \times 15^\circ = 165^\circ$. Como $OU \perp PQ$, $OS \perp QR$ e $OT \perp RP$, segue-se que $\angle TPU + \angle TOU = \angle SRT + \angle SOT = \angle UQS + \angle UOS = 180^\circ$ e portanto, $\angle TPU = 105^\circ$, $\angle SRT = 60^\circ$ e $\angle UQS = 15^\circ$ e estes estão na razão $7 : 4 : 1$.

19) Dos três conjuntos $\{1, 2, 5, 8\}$, $\{2, 3, 5, 7\}$ e $\{3, 4, 5, 8\}$ vê-se que o vértice de número 5 é adjacente a 2, 3 e 8. Os três vértices opostos a 5 sobre as faces que convergem neste vértice são 1, 7 e 4. Portanto o vértice diagonalmente oposto a 5 é 6.

20) O menor produto será obtido ao formarmos os pares utilizando-se os *menores números ímpares* com os *maiores números pares*, a saber $(-5, 4)$, $(-3, 2)$, $(-1, 0)$, $(1, -2)$ e $(3, -4)$ então :
 $N = (-20) + (-6) + 0 + (-2) + (-12) = -40$