XXV OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA
Primeira Fase – Nível Universitário

PROBLEMA 1

Seja $X \subseteq \mathrm{R}^3$ o poliedro convexo cujos vértices são todos os pontos $(x, y, z) \in \mathrm{Z}^3$ com $x^2 + y^2 + z^2 = 2.$ Calcule o volume de X.

PROBLEMA 2

O tenista Berrando Gemigemi tem 30 dias para preparar-se para um torneio. Se ele treina 3 dias seguidos ele tem fadiga muscular. Ele, então, decide que, durante esses 30 dias, irá treinar 20 dias, sem nunca treinar 3 dias seguidos, e descansar nos outros 10 dias. De quantas maneiras diferentes ele pode escolher os 10 dias de descanso?

PROBLEMA 3

Sejam A e B matrizes reais $n \times n$ inversíveis. Mostre que se vale a condição $(AB)^k = A^k B^k$ para três valores inteiros consecutivos de k então $AB = BA$.

PROBLEMA 4

Sabemos que $\sum_{k>0} \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + ... = \frac{\text{®}^2}{6}$. Defina $f(n) = \sum_{0<k\leq n} \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + ... + \frac{1}{n^2}$.

Prove que existe um número real $a > 0$ tal que existe o limite:

$$\lim_{n\to\infty}\left(f(n) - \frac{\text{®}^2}{6} + \frac{a}{n}\right) \cdot n^2.$$

Calcule a e este limite.

PROBLEMA 5

Sejam a e n inteiros, $n > 1$, $mdc(a, n) = 1$.

Prove que o polinômio $(1/n)\left((X + a)^n - X^n - a\right)$ tem todos os coeficientes inteiros se e somente se n é primo.

PROBLEMA 6

Defina $a_1 = 3$, $a_{n+1} = a_n^2 - 2$.

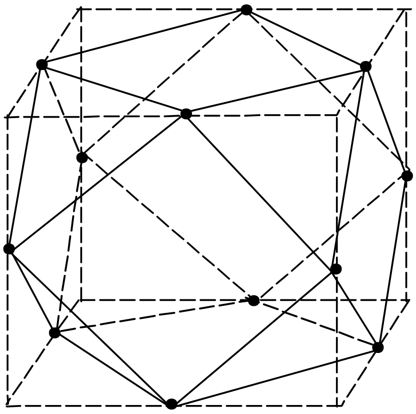
Prove que $\lim_{n\to\infty} \frac{\log\log a_n}{n} = \log 2$ e calcule $\lim_{n\to\infty} (\log\log a_n - n\log 2)$.

(Observação: os logaritmos estão todos na base e).

Soluções Nível Universitário – Primeira Fase

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 1:

Os vértices de X são os doze pontos $(\pm1,\pm1,0),(\pm1,0,\pm1),(0,\pm1,\pm1),$ **[1 ponto]**
que são os pontos médios das arestas do cubo $(\pm1,\pm1,\pm1)$, donde X é obtido a partir do cubo tirando fora uma pirâmide (ou tetraedro) em cada vértice.



[+3 pontos; até um total de 4 pontos por descrever ou desenhar o poliedro sem calcular o seu volume**].**

O volume do cubo é $2^3 = 8$.
Cada pirâmide tem base de área 1/2 e altura 1 logo tem volume igual a 1/6.

Assim o volume do sólido é igual a $8-\dfrac{8}{6}=\dfrac{20}{3}$ **[+6 pontos]**

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 2:

Podemos dividir os 30 dias em 10 blocos de três dias.
É claro que ele deverá descansar em exatamente um dia por bloco. **[1 ponto]**
Se alguma vez ele descansa no dia central de um bloco depois disso ele não poderá descansar no último dia de um bloco; analogamente, se alguma vez ele descansa no primeiro dia de um bloco ele deverá descansar no primeiro dia de todos os blocos que vierem depois. Assim, ele deve descansar no último dia nos primeiros z blocos, depois descansar no dia central durante y blocos e finalmente descansar no primeiro dia nos últimos z blocos, onde $x + y + z = 10$,
$x, y, z \geq 0$, $x, y, z \in$ Z. **[+6 pontos]**

O número de soluções é $\binom{12}{2} = 66.$ **[+3 pontos]**

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 3:

Suponha que $(AB)^k = A^kB^k$, $(AB)^{k+1} = A^{k+1}B^{k+1}$ e $(AB)^{k+2} = A^{k+2}B^{k+2}$. Temos então $A^{k+1}B^{k+1} = (AB)^{k+1} = (AB)(AB)^k = AB\,A^kB^k$, e logo (multiplicando à esquerda por A^{-1} e à direita por B^{-k}) obtemos $A^kB = BA^k$. **[3 pontos]**

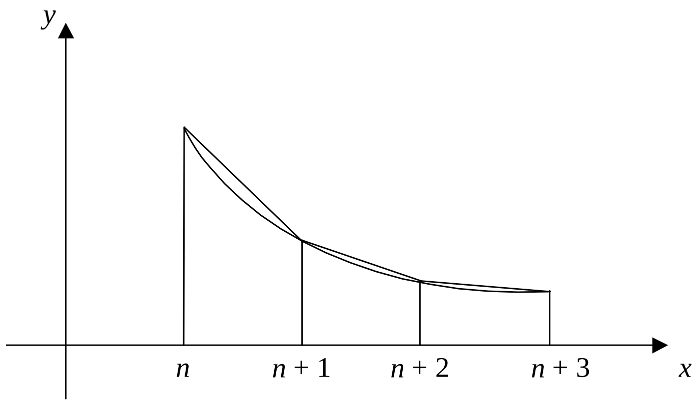
Analogamente, usando a segunda e a terceira igualdades, obtemos $A^{k+1}B = BA^{k+1}$ **[+2 pontos]**

Assim temos $BA^{k+1} = A^{k+1}B = A\cdot A^kB = A\cdot BA^k$, donde, multiplicando à direita por A^{-k}, obtemos $BA = AB$. **[+5 pontos]**

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 4:

Temos $\dfrac{®^2}{6} - f(n) = \dfrac{1}{(n+1)^2}+\dfrac{1}{(n+2)^2}+\dfrac{1}{(n+3)^2}+\ldots$

Podemos obter uma boa estimativa para esta soma estimando a área sob o gráfico de $y = \frac{1}{x^2},\ x \geq n$, pela regra dos trapézios:



A área exata é $\int_n^{\infty} \frac{1}{t^2}\,dt = \frac{1}{n}.$

A área obtida pela aproximação, que é ligeiramente maior, é

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2}\right) + \ldots =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \frac{1}{(n+3)^2} + \ldots = \frac{1}{2n^2} + \frac{\pi^2}{6} - f(n)$$

Donde $\left(f(n) - \frac{\pi^2}{6} + \frac{1}{n}\right)n^2 < \frac{1}{2}$

Assim $a = 1$ e, se acreditarmos que esta aproximação é boa, teremos que o limite é igual a 1/2.
[+7 pontos]

Para demonstrarmos que o erro é realmente pequeno, devemos estimar a diferença entre as áreas:

$$\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2}\right) - \int_n^{n+1} \frac{1}{t^2}\,dt\,\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2}\right) - \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{2n^2(n+1)^2} < \frac{1}{2n^4}$$

Assim

$$0 < \frac{\pi^2}{6} - f(n) - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} < \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n^4} + \frac{1}{(n+1)^4} + \ldots\right)$$

$$< \frac{1}{2}\int_{n-1}^{\infty} \frac{1}{t^4}\,dt = \frac{1}{6}\frac{1}{(n-1)^3}$$

e com isso

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\cdot\frac{n^2}{(n-1)^3} < \left(f(n) - \frac{\pi^2}{6} + \frac{1}{n}\right)n^2 < \frac{1}{2},$$

o que confirma que o limite é igual a 1/2. **[+3 pontos]**

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 5:

Temos $(X+a)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} X^k$. Assim $(X+a)^n - X^n - a = \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} a^{n-k} X^k + (a^n - a)$. **[1 ponto]**

Se n é primo e $1 \le k \le n-1, \binom{n}{k} = \frac{n(n-1)...(n-k+1)}{k!}$ é múltiplo de n, pois o numerador é múltiplo de n mas o numerador não, e, pelo pequeno Teorema de Fermat, $a^n - a$ é múltiplo de n. Assim, nesse caso, o polinômio $\left(\frac{1}{n}\right)\left((X+a)^n - X^n - a\right)$ tem todos os coeficientes inteiros. **[+3 pontos]**

Se n é composto, seja q um fator primo de n. Temos então que $\binom{n}{q} = \frac{n(n-1)...(n-q+1)}{q!}$ não é múltiplo de n. De fato, se q^k é a maior potência de q que divide n, a maior potência de q que divide $\binom{n}{q}$ é q^{n-1}, pois o único fator múltiplo de q no numerador é n e o único fator múltiplo de q em $q! = q(q-1)\dots.2.1$ é q. Assim, nesse caso, o coeficiente de X^q em $\left(\frac{1}{n}\right)\left((X+a)^n - X^n - a\right)$ não é inteiro. **[+6 pontos]**

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 6:

A recursão é satisfeita por $a_n = \sim^{2^n} + \sim^{-2^n}$ para qualquer número real $\sim$, de fato, por indução

$$a_{n+1} = a_n^2 - 2 = \left(\sim^{2^n} + \sim^{-2^n}\right)^2 - 2$$
$$= \sim^{2^{n+1}} + 2 + \sim^{-2^{n+1}} - 2 = \sim^{2^{n+1}} + \sim^{-2^{n+1}}.$$

Para a seqüência do problema, basta resolver $\sim^2 + \sim^{-2} = 3$ que tem raiz $\sim = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Assim

$$a_n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2^n} + \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2^n}.$$ **[5 pontos]**

Assim,

$$a_n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2^n} + \pounds(n), \text{ onde } \lim_{n\to\infty}|\pounds(n)| = 0 \text{ donde } \log a_n = 2^n \cdot \log\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + \pounds_1(n), \lim_{n\to\infty}|\pounds_1(n)| = 0 \text{ e}$$

$$\log\log a_n = n\log 2 + \log\log\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + \pounds_2(n), \lim_{n\to\infty}|\pounds_2(n)| = 0$$

Assim $\lim_{n\to\infty}\frac{\log\log a_n}{n} = \log 2$ e $\lim_{n\to\infty}\left(\log\log a_n - n\log 2\right) = \log\log\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$. **[+5 pontos]**

Observação: Uma demonstração correta de que $\lim_{n\to\infty} = \frac{\log\log a_n}{n} = \log 2$ vale 4 pontos (isto pode ser feito sem a fórmula para a_n).