XX OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

Segunda Fase - Nível 2

Instruções:

- A duração da prova é de 4 horas e 30 minutos.
- Não é permitido o uso de calculadora nem consulta a livros ou notas.
- Você pode solicitar papel para rascunho.
- Todas as suas soluções devem ser justificadas.

PROBLEMA 1

Que frações devem ser retiradas da soma $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\frac{1}{10}+\frac{1}{12}$ para que a soma das restantes seja igual a 1? Dê todas as soluções.

PROBLEMA 2

Encontre dois números de três algarismos cada um, usando cada um dos dígitos 1, 2, 3, 4, 5, 6 exatamente uma vez, de forma que a diferença entre eles (o maior menos o menor) seja a menor possível.

PROBLEMA 3

Cinco cartões numerados com 3, 4, 5, 6 e 7, respectivamente, são colocados em uma caixa. Os cartões são retirados da caixa, um de cada vez e colocados sobre a mesa. Se o número de um cartão retirado é menor do que o número do cartão imediatamente anterior, então este cartão imediatamente anterior é colocado de volta na caixa. O procedimento continua até que todos os cartões estejam sobre a mesa. Qual é o número máximo de vezes que retiramos cartões da caixa?

PROBLEMA 4

Em um triângulo acutângulo ABC o ângulo interno de vértice A mede 30^0. Os pontos B_1 e C_1 são os pés das alturas traçadas por B e C, respectivamente e os pontos B_2 e C_2 são médios dos lados AC e AB, respectivamente. Mostre que os segmentos B_1C_2 e B_2C_1 são perpendiculares.

PROBLEMA 5

Existem 20 balas sobre uma mesa e duas crianças começam a comê-las, uma criança de cada vez. Em cada vez, cada criança deve comer pelo menos uma bala e está proibida de comer mais que a metade das balas que existem sobre a mesa. Nesta brincadeira, ganha a criança que deixar apenas uma bala sobre a mesa. Qual das duas crianças pode sempre ganhar na brincadeira: a primeira ou a segunda a jogar? Como deve fazer para ganhar?

PROBLEMA 6

Pintam-se de preto todas as faces de um cubo de madeira cujas arestas medem n centímetros onde $n \geq 3$. Por cortes paralelos às faces, o cubo é dividido em n^3 cubos pequenos, cada um com arestas medindo 1 centímetro. Sabendo que o número total de cubos pequenos com exatamente uma face pintada de preto é igual ao número de cubos pequenos apresentando todas as faces sem pintura, determine o valor de n.

SOLUÇÕES SEGUNDA FASE OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA
NÍVEL 2

Solução Problema 1

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\frac{1}{10}+\frac{1}{12}=\frac{60}{120}+\frac{40}{120}+\frac{30}{120}+\frac{20}{120}+\frac{15}{120}+\frac{12}{120}+\frac{10}{120}\ (*)$$

Devemos escrever 120 como soma de algumas parcelas 60, 40, 30, 20, 15, 12, 10. As soluções possíveis são
60 + 40 + 20 = 120
60 + 30 + 20 + 10 = 120.

Assim, podemos remover $\frac{1}{4},\frac{1}{8},\frac{1}{10}$ e $\frac{1}{12}$ ou $\frac{1}{3},\frac{1}{8}$ e $\frac{1}{10}$.

Evidentemente 15 e 12 não podem aparecer, pois a soma não seria múltipla de 10 nesse caso.

Solução Problema 2

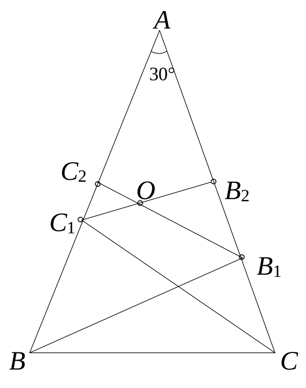
Para que a diferença seja a menor possível, os números devem ser os mais próximos possíveis. Assim, os algarismos das centenas devem ser consecutivos. A melhor escolha é aquela em que as dezenas formadas pelos algarismos restantes tenham a maior diferença possível, o que ocorre para as dezenas 65 e 12. Assim, os algarismos das centenas devem ser 3 e 4. O menor número começado por 4 é 412 e o maior começado por 3 é 365, cuja diferença é 47.

Solução Problema 3

O número máximo de vezes que retiramos cartões da caixa é 15, o que corresponde à seqüência de cartões retirados 7, 6, 5, 4, 3, 7, 6, 5, 4, 7, 6, 5, 7, 6, 7. De fato, dentre os primeiros 5 cartões há necessariamente um que é menor que o cartão seguinte, e que portanto não voltará mais para a caixa, o mesmo acontecendo para pelo menos um cartão dentre os 4 seguintes, depois para pelo menos um dentre os 3 seguintes, depois para pelo menos um dentre os dois seguintes, sobrando no máximo um cartão, que será o último a ser retirado da caixa.

Solução Problema 4

O segmento B_1C_2 é uma mediana do triângulo AB_1B e portanto $AC_2 = B_1C_2$ e $C_2\hat{B}_1A = B\hat{A}C = 30°$.
Daí $B\hat{C}_2B_1 = C_2\hat{B}_1A + B\hat{A}C = 60°$. Analogamente,
$A\hat{C}_1B_2 = 30°$. Finalmente
$C_1\hat{O}C_2 = 180° - B\hat{C}_2B_1 - A\hat{C}_1B_2 = 90°$



Solução Problema 5

Ganha a primeira criança. No início ele deve comer 5 balas, deixando 15 balas sobre a mesa. A segunda criança deve comer no mínimo uma e no máximo 7 balas, sobrando entre 8 e 14 balas sobre a mesa. Em qualquer caso a primeira criança pode comer algumas balas, deixando exatamente 7 sobre a mesa. A segunda criança agora deve comer entre uma e três balas, deixando de 4 a 6 balas sobre a mesa. A primeira criança agora come algumas delas, deixando exatamente 3 balas, forçando a segunda criança a comer uma. Comendo mais uma após isso, a primeira criança acaba deixando apenas uma bala no final e ganhando o jogo.

Solução Problema 6

Um cubo pequeno que não possui qualquer face pintada provém do interior do cubo grande. Isto significa que esse cubo pequeno é parte de um cubo de lado $n - 2$, obtido quando retiramos uma unidade de cada face do cubo original. Assim, existem $(n - 2)^3$ cubos pequenos não pintados. Por outro lado, um cubo pequeno com uma face pintada provém da face do cubo original, mas não tendo qualquer parte da aresta deste cubo. Assim, existem $6(n - 2)^2$ cubos pequenos com face pintada. Portanto, $(n - 2)^3 = 6(n - 2)^2$, com $n > 2$. Logo, $n - 2 = 6$, ou seja, $n = 8$.