XX OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

Segunda Fase - Nível 3

Instruções:

- A duração da prova é de 4 horas e 30 minutos.
- Não é permitido o uso de calculadora nem consulta a livros ou notas.
- Você pode solicitar papel para rascunho.
- Todas as suas soluções devem ser justificadas.

PROBLEMA 1

Cinco cartões numerados com 3, 4, 5, 6 e 7, respectivamente, são colocados em uma caixa. Os cartões são retirados da caixa, um de cada vez e colocados sobre a mesa. Se o número de um cartão retirado é menor do que o número do cartão imediatamente anterior, então este cartão imediatamente anterior é colocado de volta na caixa. O procedimento continua até que todos os cartões estejam sobre a mesa. Qual é o número máximo de vezes que retiramos cartões da caixa?

PROBLEMA 2

Existem 20 balas sobre uma mesa e duas crianças começam a comê-las, uma criança de cada vez. Em cada vez, cada criança deve comer pelo menos uma bala e está proibida de comer mais que a metade das balas que existem sobre a mesa. Nesta brincadeira, ganha a criança que deixar apenas uma bala sobre a mesa. Qual das duas crianças pode sempre ganhar na brincadeira: a primeira ou a segunda a jogar? Como deve fazer para ganhar?

PROBLEMA 3

Uma reta que passa pelos pontos médios de dois lados opostos de um quadrilátero convexo forma ângulos iguais com ambas as diagonais. Mostre que as duas diagonais têm o mesmo comprimento.

PROBLEMA 4

Sobre os lados AB e AC de um triângulo acutângulo ABC são construídos, exteriormente ao triângulo, semicírculos tendo estes lados como diâmetros. As retas contendo as alturas relativas aos lados AB e AC cortam esses semicírculos nos pontos P e Q. Prove que $AP = AQ$.

PROBLEMA 5

Seja $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ uma função tal que

$f(1) = 999$ e $f(1) + f(2) + ... + f(n) = n^2 \cdot f(n)$ para todo n inteiro positivo.

Determine o valor de $f(1998)$.

PROBLEMA 6

O menor múltiplo de 1998 que possui apenas os algarismos 0 e 9 é 9990. Qual é o menor múltiplo de 1998 que possui apenas os algarismos 0 e 3?

SOLUÇÕES SEGUNDA FASE OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA
NÍVEL 3

Solução Problema 1

O número máximo de vezes que retiramos cartões da caixa é 15, o que corresponde à seqüência de cartões retirados 7, 6, 5, 4, 3, 7, 6, 5, 4, 7, 6, 5, 7, 6, 7. De fato, dentre os primeiros 5 cartões há necessariamente um que é menor que o cartão seguinte, e que portanto não voltará mais para a caixa, o mesmo acontecendo para pelo menos um cartão dentre os 4 seguintes, depois para pelo menos um dentre os 3 seguintes, depois para pelo menos um dentre os dois seguintes, sobrando no máximo um cartão, que será o último a ser retirado da caixa.

Solução Problema 2

Ganha a primeira criança. No início ele deve comer 5 balas, deixando 15 balas sobre a mesa. A segunda criança deve comer no mínimo uma e no máximo 7 balas, sobrando entre 8 e 14 balas sobre a mesa. Em qualquer caso a primeira criança pode comer algumas balas, deixando exatamente 7 sobre a mesa. A segunda criança agora deve comer entre uma e três balas, deixando de 4 a 6 balas sobre a mesa. A primeira criança agora come algumas delas, deixando exatamente 3 balas, forçando a segunda criança a comer uma. Comendo mais uma após isso, a primeira criança acaba deixando apenas uma bala no final e ganhando o jogo.

Solução Problema 3

Sejam $ABCD$ o quadrilátero, M,N,P e Q os pontos médios dos lados AB, BC, CD e DA, respectivamente. MN e PQ são paralelos à diagonal AC e medem a metade de seu comprimento, enquanto NP e QM são paralelos à diagonal BD e medem a metade de seu comprimento. Assim, $MNPQ$ é um paralelogramo. As condições do problema dizem que a reta que passa pelos pontos médios de dois lados opostos de $ABCD$ (digamos $\overline{MP}$, sem perda de generalidade) formam ângulos iguais com $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$, portanto com $\overline{PQ}$ e $\overline{NP}$, donde MP é bissetriz de $N\hat{P}Q$. Logo $MNPQ$ deve ser um losango, donde $\overline{MN} = \overline{NP}$, e portanto $\overline{AC} = \overline{BD}$ (pois $\overline{MN} = \overline{AC}/2$ e $\overline{NP} = \overline{BD}/2$).

Solução Problema 4

Sejam M o pé da altura relativa ao lado AB. Como o triângulo APB é retângulo em P, e PM é a altura de P em relação a AB temos $\overline{AP}^2 = \overline{AB} \cdot \overline{AM} = \overline{AB} \cdot \overline{AC} \cdot \cos B\hat{A}C$. Analogamente mostra-se que $\overline{AQ}^2 = \overline{AC} \cdot \overline{AB} \cdot \cos B\hat{A}C$. Portanto, $\overline{AP} = \overline{AQ}$.

Solução Problema 5

Calculemos alguns valores de $f(n)$:

$$f(1) = 999;\ f(1) + f(2) = 2^2 \cdot f(2) \Rightarrow 3f(2) = 999 \Rightarrow f(2) = 333$$

$$f(1) + f(2) + f(3) = 3^2 \cdot f(3) \Rightarrow 8f(3) = 999 + 333 \Rightarrow f(3) = \frac{333}{2}$$

$$f(1) + f(2) + f(3) + f(4) = 4^2 \cdot f(4) \Rightarrow 15f(4) = 999 + 333 + \frac{333}{2} \Rightarrow f(4) = \frac{999}{10}$$

Assim, temos $f(1) = \frac{999}{1}$, $f(2) = \frac{999}{3}$, $f(3) = \frac{999}{6}$, $f(4) = \frac{999}{10}$, e é razoável conjecturar que

$f(n) = \frac{999}{1 + 2 + \ldots + n} = \frac{1998}{n(n+1)}$ Para todo $n \in$ N. Vamos provar esse fato: Para $n \geq 2$ temos

$$f(1) + f(2) + \ldots + f(n) = n^2 f(n) \Rightarrow (n^2 - 1)f(n) = f(1) + f(2) + \ldots + f(n-1) \Rightarrow f(n) = \frac{f(1) + f(2) + \ldots + f(n-1)}{n^2 - 1}.$$

Por hipótese de indução,

$f(k) = \frac{1998}{k(k+1)} = \frac{1998}{k} - \frac{1998}{k+1}$, para $k = 1, 2, \ldots, n - 1$, e portanto

$$f(1) + f(2) + \ldots f(n-1) = \frac{1998}{1} - \frac{1998}{2} + \frac{1998}{2} - \frac{1998}{3} + \ldots + \frac{1998}{n-1} - \frac{1998}{n} = \frac{1998}{1} - \frac{1998}{n} =$$

$\frac{1998(n-1)}{n} \Rightarrow f(n) = \frac{1998(n-1)}{n(n^2-1)} = \frac{1998}{n(n+1)}$ pois $n^2 - 1 = (n-1)(n+1)$),

como queríamos demonstrar.

Fazendo $n = 1998$ temos $f(1998) = \frac{1998}{1998 \cdot 1999} = \frac{1}{1999}$.

Solução Problema 6

$1998 = 2 \times 999 = 2 \times 3^3 \times 37$. Um número formado apenas pelos algarismos 0 e 3 é múltiplo de 3^3 se e somente se o número de algarismos 3 é múltiplo de 9 (pois ao dividi-lo por 3 obtemos um número que possui apenas os algarismos 0 e 1 que deve ser múltiplo de 9, o que ocorre se e só se o número de algarismos 1 é múltiplo de 9). Assim, o número desejado deve ter pelo menos 9 algarismos 3, e deve terminar por 0, por ser par. O menor número com essas propriedades é 3333333330, que é múltiplo de 1998 pois é par, é múltiplo de 3^3 e é múltiplo de 37 por ser múltiplo de 111 (é igual a 111×30030030)).