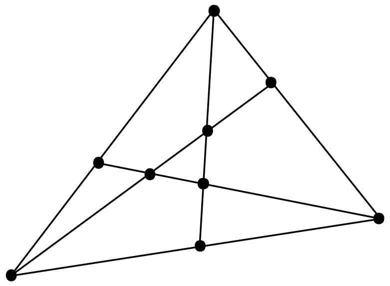
XXV OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA
Segunda Fase – Nível 1 (5ª. ou 6ª. séries)

PARTE A
(Cada problema vale 3 pontos)

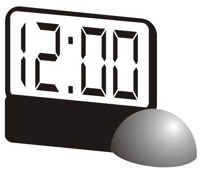
01.
Quantas vezes aparece o algarismo 9 no resultado da operação $10^{100} - 2003$?

02.
Quantos números inteiros maiores do que 2003^2 e menores do que 2004^2 são múltiplos de 100?

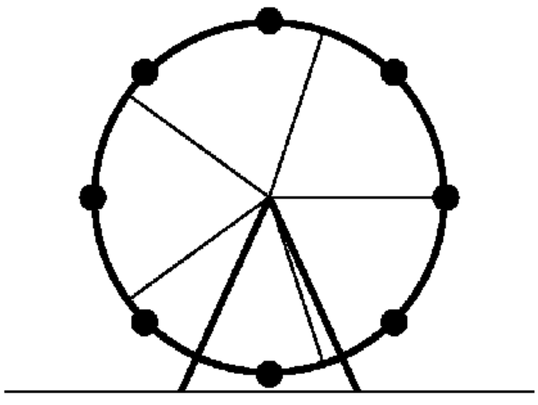
03.
Quantos triângulos existem cujos lados estão sobre alguns dos segmentos traçados na figura ao lado?



04.
Um estudante, com muito tempo livre e muita curiosidade, resolveu fazer o seguinte: a cada minuto, ao mudar o horário em seu relógio digital, marcava em seu caderno um *X* para cada algarismo **7** que aparecia no visor. Assim, se seu relógio mostrava **02:07** ele marcava *X* e quando seu relógio mostrou **07:17** ele marcou *XX*. Começou a fazer isso quando seu relógio mostrava **01:00** e parou quase doze horas depois, quando o relógio mostrava **12:59**.
Calcule a metade da quantidade de *X* que ele marcou em seu caderno.

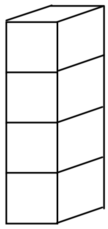


05.
A grande atração do OBM Parque é uma roda gigante (a figura mostra uma roda gigante similar, porém com um número menor de cabines). As cabines são numeradas com 1, 2, 3,…, no sentido horário. Quando a cabine 25 está na posição mais baixa da roda-gigante, a de número 8 está na posição mais alta. Quantas cabines tem a roda-gigante?



06.
Anos bissextos são múltiplos de 4, exceto aqueles que são múltiplos de 100 mas não de 400. Quantos anos bissextos houve desde a Proclamação da República, em 1889, até hoje?

07.
Em um dado comum a soma dos pontos sobre faces opostas é sempre 7. Beatriz construiu uma torre com 4 dados comuns iguais, colando as faces como mostrado na figura. Qual é o menor número de pontos que Beatriz pode obter somando todos os pontos das dezoito faces da superfície da torre?



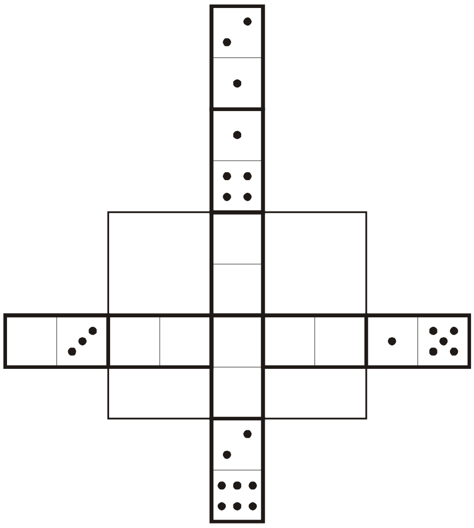
08.
Na multiplicação a seguir *a*, *b*, *c* e *d* são algarismos.

$$\begin{array}{r} 45 \\ a3 \quad \times \\ \hline 3bcd \end{array}$$

Calcule $b + c + d$.

09.
A média de cinco inteiros positivos diferentes é 11. Determine o maior valor possível para o maior dos cinco inteiros.

10.
Nove peças diferentes de dominó estão sobre uma mesa, parcialmente cobertos por um pedaço de papel. Os dominós se tocam de modo que 1 ponto é vizinho a 1 ponto, 2 pontos são vizinhos a 2 pontos, etc. Qual o total de pontos escondidos pelo papel?



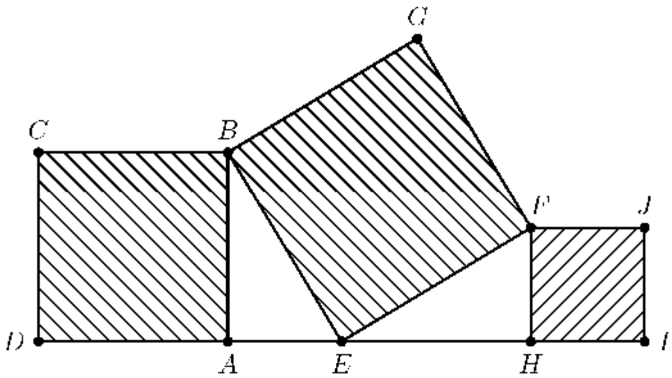
PARTE B
(Cada problema vale 10 pontos)

PROBLEMA 1

Quais números inteiros positivos menores que 120 podem ser escritos como soma de duas ou mais potências distintas de base 3 e exponente positivo? Por exemplo, $12 = 3^2 + 3^1$ é um número deste tipo mas $18 = 3^2 + 3^2$ não é.

PROBLEMA 2

No desenho ao lado, o quadrado *ABCD* tem área de 64 cm^2 e o quadrado *FHIJ* tem área de 36 cm^2. Os vértices *A*, *D*, *E*, *H* e *I* dos três quadrados pertencem a uma mesma reta. Calcule a área do quadrado *BEFG*.



PROBLEMA 3

Considere o produto de todos os divisores positivos de um número inteiro positivo, diferentes desse número. Dizemos que o número é *poderoso* se o produto desses divisores for igual ao quadrado do número. Por exemplo, o número 12 é poderoso, pois seus divisores positivos menores do que ele são 1, 2, 3, 4 e 6 e $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 6 = 144 = 12^2$. Apresente todos os números poderosos menores do que 100.

Soluções Nível 1 – Segunda Fase – Parte A

CRITÉRIO DE CORREÇÃO: PARTE A

Na parte A serão atribuídos **3 pontos** para cada resposta correta e a pontuação máxima para essa parte será 30. ***NENHUM PONTO*** deverá ser atribuído para respostas que não coincidirem com o gabarito oficial, abaixo:

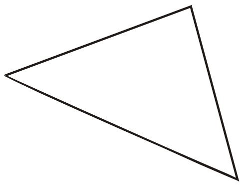
Problema	**01**	**02**	**03**	**04**	**05**	**06**	**07**	**08**	**09**	**10**
Resposta	98	40	17	66	34	27	58	15	45	22

As soluções a seguir são puramente para fins didáticos.

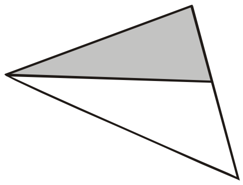
1. $10^{100} - 2003 = 1\underbrace{000...000}_{100\ zeros} - 2003 = \underbrace{999...97997}_{100\ \text{algarismos}}$. Dos cem algarismos do resultado, dois são o 7; portanto o número de algarismos 9 no resultado é $\boxed{\mathbf{98}}$.

2. $2003^2 = 4012009$ e $2004^2 = 4016016$. Os múltiplos de 100 são 4012100 = 40121 × 100, 4012200 = 40122 × 100, 4012300 = 40123 × 100, ..., 4016000 = 40160 × 100. O número de múltiplos de 100 é, então, 40160 – 40120 = $\boxed{\mathbf{40}}$.

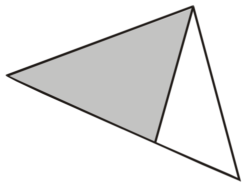
3. Podemos contar o número de triângulos segundo o diagrama abaixo:



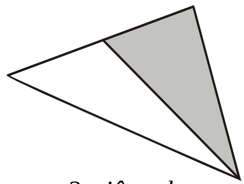
1 triângulo



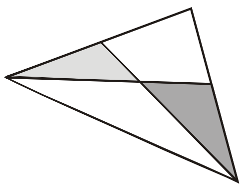
2 triângulos



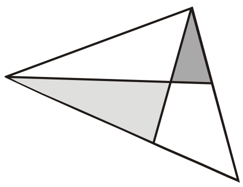
2 triângulos



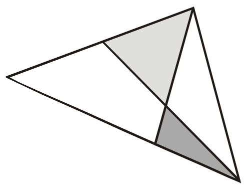
2 triângulos



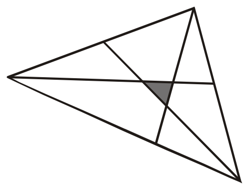
3 triângulos



3 triângulos



3 triângulos



1 triângulo

O número total de triângulos é 1 + 2 + 2 + 2 + 3 + 3 + 3 + 1 = $\boxed{\mathbf{17}}$.

4. Quando o numerador das horas mostrar 01, 02, ..., 12, o marcador dos minutos apresentará o algarismo 7 nas seguintes situações: 07, 17, 27, 37, 47 e 57, totalizando 12 × 6 = 72 exibições no marcador de minutos. Ocorre que o algarismo 7 também aparece no marcador das horas nas situações 07:00, 07:01, etc, ou seja, devem ser contadas mais 60 exibições do 7. O número total de vezes em que aparece o 7 é 72 + 60 = 132 e metade desse número é $\boxed{\mathbf{66}}$.

5. Se as cabines de números 8 e 25 estão em pontos diametralmente opostos na circunferência, então, de cada lado do diâmetro existem 25 – 8 – 1 = 16 cabines. Logo o número total de cabines da roda gigante é 2 × 16 + 2 = $\boxed{\mathbf{34}}$.

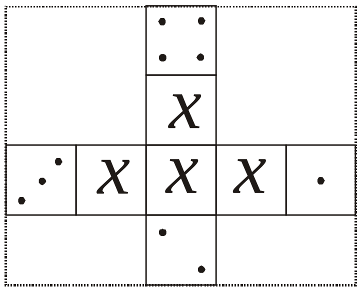
6. Os anos bissextos são 1892, 1896, 1904, ..., 2000 (note que 1900 não é bissexto, pois é múltiplo de 100 mas não é de 400; por outro lado, 2000 é bissexto, pois é múltiplo de 100 e de 400). De 1904 a 2000 há $\frac{2000-1904}{4}+1=24+1=25$ múltiplos de 4. Portanto, o número de anos bissextos desde 1889 até agora é 25 + 2 = $\boxed{\mathbf{27}}$.

7. As faces laterais em cada dado compõem-se de dois pares de faces opostas, logo nelas a soma é sempre 7 + 7 = 14. Temos liberdade de escolher os números que vão ficar na face superior e na face inferior, pois há 4 dados na pilha. Para minimizar a soma, escolhemos o 1 para figurar nessas duas faces . Portanto a soma mínima é 2 + 4 × 14 = $\boxed{\mathbf{58}}$.

8. No produto 45 × *a*3 = 3*bcd*, é imediato concluir que *d* = 5, isto é, 45 × *a*3 = 3*bc*5. Fazendo uma estimativa de *a*, vemos que as possibilidades são duas: 45 × 73 = 3285 e 45 × 83 = 3735 de onde se conclui que para *a* = 7 temos *b* = 2 e *c* = 8, e para *a* = 8 temos *b* = 7 e *c* = 3. Portanto, *b* + *c* + *d* = 2 + 8 + 5 = 7 + 3 + 5 = $\boxed{\mathbf{15}}$.

9. Sejam *a, b, c, d, e* os cinco números. Temos $\frac{a+b+c+d+e}{5}=11 \Leftrightarrow a+b+c+d+e=55$.
   Um desses números, digamos *a*, é o maior possível se, e somente se, a soma dos demais for a menor possível. Isto ocorre para $b+c+d+e=1+2+3+4=10$, de onde vem que *a* = 55 – 10 = $\boxed{\mathbf{45}}$.

10. Seja *x* o número de pontos que deve aparecer nas metades das peças do dominó conforme o desenho abaixo:



Temos $x \neq 0$ (pois já foi usada a peça 0:3), $x \neq 1$ e $x \neq 4$ (já foi usada a peça 4:1), $x \neq 2$ (já foi usada a peça 2:1), $x \neq 5$ (já foi usada a peça 5:1) e $x \neq 6$ (já foi usada a peça 6:2). Portanto, *x* = 3 (verifica-se que este caso é possível) e a soma dos pontos é 3 + 4 + 1 + 2 + 4 × 3 = $\boxed{\mathbf{22}}$.

Soluções Nível 1 – Segunda Fase – Parte B

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 1:

Temos $3^1 = 3,\ 3^2 = 9,\ 3^3 = 27,\ 3^4 = 81$ mas $3^5 = 243$ (não serve). Assim, os números obtidos de acordo com as condições do problema são:

3 + 9 =**12**, 3 + 27 = **30**, 3 + 81 = **84**, 9 + 27 = **36**, 9 + 81 = **90**, 27 + 81 = **108**,
3 + 9 + 27 = **39**, 3 + 9 + 81 = **93**, 3 + 27 + 81 = **111**, 9 + 27 + 81 = **117**.

Note que o número 3 + 9 + 27 + 81 = 120 não serve.

CRITÉRIO DE CORREÇÃO:

- Atribuir **1 ponto** a cada número encontrado.

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 2:

PRIMEIRA SOLUÇÃO: Os triângulos *ABE* e *EHF* são retângulos em *A* e *H*, respectivamente; a medida do ângulo $B\hat{E}F$ é de 90°; se a medida do ângulo $H\hat{E}F$ é *x*, então a medida dos ângulos $E\hat{F}H$ e $A\hat{E}B$ é 90° – *x* e, conseqüentemente, a medida do ângulo $A\hat{B}E$ é *x*; como *BE* = *EF* (são lados do mesmo quadrado), então os triângulos mencionados são congruentes (pelo caso ALA de congruência de triângulos). Utilizando o teorema de Pitágoras, podemos escrever $BE^2 = AB^2 + AE^2$, o que mostra que a área do quadrado *BEFG* é a soma das áreas dos quadrados *ABCD* e *FHIJ*, ou seja, 64 + 36 = 100 cm^2.

SEGUNDA SOLUÇÃO: Os triângulos *ABE* e *EHF* são retângulos em *A* e *H*, respectivamente; a medida do ângulo $B\hat{E}F$ é de 90°; se a medida do ângulo $H\hat{E}F$ é *x*, então a medida dos ângulos $E\hat{F}H$ e $A\hat{E}B$ é 90° – *x* e, conseqüentemente, a medida do ângulo $A\hat{B}E$ é *x*; como *BE* = *EF* (são lados do mesmo quadrado), então os triângulos mencionados são congruentes (pelo caso ALA de congruência de triângulos). Como o quadrado *ABCD* tem área igual a 64 cm^2, concluímos que seus lados medem $\sqrt{64} = 8$ cm; o quadrado *FHIJ* tem área igual a 36 cm^2, logo seus lados medem 6 cm. Temos então, *BA* = *EH* = 8 cm e *FH* = *AE* = 6 cm.
Utilizando o teorema de Pitágoras, podemos escrever $BE^2 = AB^2 + AE^2 = 8^2 + 6^2 = 100$, ou seja, a área do quadrado *BEFG* é 100 cm^2.

TERCEIRA SOLUÇÃO (sem usar o teorema de Pitágoras): Os triângulos *ABE* e *EHF* são retângulos em *A* e *H*, respectivamente; a medida do ângulo $B\hat{E}F$ é de 90°; se a medida do ângulo $H\hat{E}F$ é *x*, então a medida dos ângulos $E\hat{F}H$ e $A\hat{E}B$ é 90° – *x* e, conseqüentemente, a medida do ângulo $A\hat{B}E$ é *x*; como *BE* = *EF* (são lados do mesmo quadrado), então os triângulos mencionados são congruentes (pelo caso ALA de congruência de triângulos). Como o quadrado *ABCD* tem área igual a 64 cm^2, concluímos que seus lados medem $\sqrt{64} = 8$ cm; o quadrado *FHIJ* tem área igual a 36 cm^2, logo seus lados medem 6 cm. Portanto, *BA* = *EH* = 8 cm e *FH* = *AE* = 6 cm.

A área do trapézio *ABFH* é igual a $\frac{AB + FH}{2} \cdot AH = \frac{8+6}{2} \cdot 14 = 98 \text{ cm}^2$. Como o trapézio é composto pelos triângulos *ABE*, *EHF* e *BEF* e a área dos triângulos congruentes *ABE* e *EHF* é $\frac{6 \cdot 8}{2} = 24 \text{ cm}^2$, concluímos que a área do triângulo *BEF* é 98 – 2 × 24 = 50 cm^2 e, conseqüentemente, a área do quadrado *ABFH* é o dobro, ou seja, 100 cm^2.

CRITÉRIO DE CORREÇÃO:

- **Para resoluções completas**: atribuir **10 pontos** para uma solução completa equivalente às mostradas. Por solução completa se entende:

  a) mostrar ou demonstrar a congruência dos triângulos retângulos;

  b) usar Pitágoras para calcular a área do quadrado (direta ou indiretamente) ou usar a área do trapézio para achar a área da metade do quadrado e, em seguida, a área do quadrado.

- **Para resoluções parciais:**

  a) calculou corretamente os lados dos quadrados: **1 ponto** para cada quadrado.

  b) explicou de forma convincente que ΔABE e ΔEHF são congruentes (não é necessária menção explícita ao caso ALA ou LAA_o de congruência): **3 pontos.**

  c) intuiu que o lado do quadrado mede 10 cm (palpite ou avaliação) sem explicar corretamente mas calculou a área do quadrado corretamente: **2 pontos.**

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 3:

PRIMEIRA SOLUÇÃO: Os divisores positivos de um número inteiro N são $d_1, d_2, d_3, \ldots, d_k$, tais que $1 = d_1 \le d_2 \le d_3 \le \ldots \le d_k = N$ e podemos observar que $1 \cdot N = d_2 \cdot d_{k-1} = d_3 \cdot d_{k-2}$ etc. Por exemplo, os divisores positivos de 12 são 1, 2, 3, 4, 6 e 12, de forma que 1×12 = 2×6 = 3×4. Note que ao excluir os divisores 1 e 12, restam 2, 3, 4 e 6, cujo produto é 2×3×4×6 = (2×6)×(3×4) = 12×12 = 12^2. Assim, concluímos que o produto dos divisores positivos de um inteiro, excluindo 1 e o próprio número, é igual ao quadrado do número se, e somente se, o número tem 6 divisores. Portanto, o número é da forma p^5 ou $p^2 \cdot q$, onde p e q são números primos positivos, distintos. Se o número é positivo menor do que 100, temos as 16 seguintes possibilidades:

$2^5 = 32$	$3^2 \cdot 2 = 18$	$5^2 \cdot 2 = 50$	$7^2 \cdot 2 = 98$
$2^2 \cdot 3 = 12$	$3^2 \cdot 5 = 45$	$5^2 \cdot 3 = 75$	
$2^2 \cdot 5 = 20$	$3^2 \cdot 7 = 63$		
$2^2 \cdot 7 = 28$	$3^2 \cdot 11 = 99$		
$2^2 \cdot 11 = 44$			
$2^2 \cdot 13 = 52$			
$2^2 \cdot 17 = 68$			
$2^2 \cdot 19 = 76$			
$2^2 \cdot 23 = 92$			

SEGUNDA SOLUÇÃO: O produto de todos os divisores positivos de um número inteiro N é igual a $N^{\frac{d(N)}{2}}$, onde $d(N)$ é o número de divisores positivos de N. O produto de todos os divisores positivos exceto 1 e N é $\dfrac{N^{\frac{d(N)}{2}}}{N} = N^{\frac{d(N)}{2}-1}$.

Temos, então, $N^{\frac{d(N)}{2}-1} = N^2 \Leftrightarrow \dfrac{d(N)}{2} - 1 = 2 \Leftrightarrow \dfrac{d(N)}{2} = 3 \Leftrightarrow d(N) = 6$. Portanto, o produto dos divisores positivos diferentes de N é o quadrado de N se, e somente se, N tem 6 divisores positivos. Logo o número é da forma p^5 ou $p^2 \cdot q$, onde p e q são números primos positivos, distintos. Se o número é positivo menor do que 100, temos as 16 seguintes possibilidades:

$2^5 = 32$			
$2^2 \cdot 3 = 12$			
$2^2 \cdot 5 = 20$	$3^2 \cdot 2 = 18$		
$2^2 \cdot 7 = 28$	$3^2 \cdot 5 = 45$	$5^2 \cdot 2 = 50$	$7^2 \cdot 2 = 98$
$2^2 \cdot 11 = 44$	$3^2 \cdot 7 = 63$	$5^2 \cdot 3 = 75$	
$2^2 \cdot 13 = 52$	$3^2 \cdot 11 = 99$		
$2^2 \cdot 17 = 68$			
$2^2 \cdot 19 = 76$			
$2^2 \cdot 23 = 92$			

CRITÉRIO DE CORREÇÃO:

- **Para resoluções completas:** atribuir **10 pontos** para uma solução completa equivalente às mostradas.
- **Para resoluções incompletas:** apenas achou os números, sem justificar: **1 ponto** para cada dois números corretos.