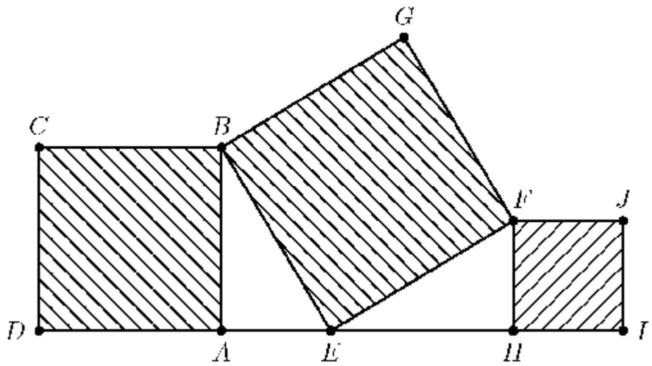
XXV OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA
Segunda Fase – Nível 2 (7ª. ou 8ª. séries)

PROBLEMA 1

No desenho ao lado, o quadrado *ABCD* tem área de 30 cm^2 e o quadrado *FHIJ* tem área de 20 cm^2. Os vértices *A*, *D*, *E*, *H* e *I* dos três quadrados pertencem a uma mesma reta. Calcule a área do quadrado *BEFG*.

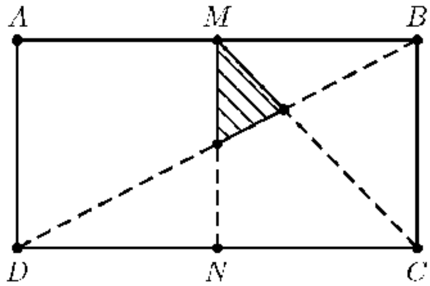


PROBLEMA 2

Dados os números inteiros de 1 a 26, escolha 13 dentre eles de forma que:
1) O número 4 está entre os números escolhidos.
2) Nenhum número escolhido é divisor de outro número escolhido.

PROBLEMA 3

Uma folha retangular *ABCD* de área 1000 cm^2 foi dobrada ao meio e em seguida desdobrada (segmento *MN*); foi dobrada e desdobrada novamente (segmento *MC*) e finalmente, dobrada e desdobrada segundo a diagonal *BD*. Calcule a área do pedaço de papel limitado pelos três vincos (região escura no desenho).



PROBLEMA 4

Considere o produto de todos os divisores positivos de um número inteiro positivo, diferentes desse número. Dizemos que o número é *poderoso* se o produto desses divisores for igual ao quadrado do número. Por exemplo, o número 12 é poderoso, pois seus divisores positivos menores do que ele são 1, 2, 3, 4 e 6 e $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 6 = 144 = 12^2$. Apresente todos os números poderosos menores do que 100.

PROBLEMA 5

Seja $f : \mathrm{R}_+^* \to \mathrm{R}_+^*$, uma função tal que $f(x) f(y) - f(xy) = \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x}$, quaisquer que sejam os reais não nulos x e y.

(a) Calcule $f(1)$

(b) Encontre uma fórmula para $f(x)$

PROBLEMA 6

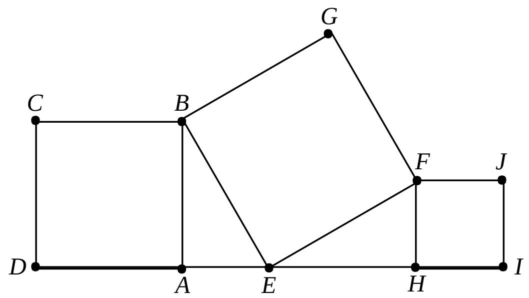
Dizemos que um número *N* de quatro algarismos é biquadrado quando é igual à soma dos quadrados de dois números: um é formado pelos dois primeiros algarismos de *N*, na ordem em que aparecem em *N* e o outro, pelos dois últimos algarismos de *N*, também na ordem em que aparecem em *N*.

Por exemplo, 1233 é biquadrado pois $1233 = 12^2 + 33^2$. Encontre um outro número biquadrado.

Observação: Lembre-se de que um número de quatro algarismos não pode começar com zero.

Soluções Nível 2 – Segunda Fase

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 1:



Os triângulos *ABE* e *EHF* são retângulos em *A* e *H*, respectivamente; a medida do ângulo $B\hat{E}F$ é de 90°; se a medida do ângulo $H\hat{E}F$ é *x*, então a medida dos ângulos $E\hat{F}H$ e $A\hat{E}B$ é $90° - x$ e, conseqüentemente, a medida do ângulo $A\hat{B}E$ é *x*; como *BE* = *EF* (são lados do mesmo quadrado), então os triângulos mencionados são congruentes (pelo caso ALA de congruência de triângulos).
Utilizando o teorema de Pitágoras, podemos escrever $BE^2 = AB^2 + AE^2$, o que mostra que a área do quadrado *BEFG* é a soma das áreas dos quadrados *ABCD* e *FHIJ*, ou seja, 30 + 20 = 50cm^2.

SEGUNDA SOLUÇÃO:
Os triângulos *ABE* e *EHF* são retângulos em *A* e *H*, respectivamente; a medida do ângulo $B\hat{E}F$ é de $90°$; se a medida do ângulo $H\hat{E}F$ é *x*, então a medida dos ângulos $E\hat{F}H$ e $A\hat{E}B$ é $90° - x$ e, conseqüentemente, a medida do ângulo $A\hat{B}E$ é *x*; como *BE* = *EF* (são lados do mesmo quadrado), então os triângulos mencionados são congruentes (pelo caso ALA de congruência de triângulos). Como o quadrado *ABCD* tem área igual a 30cm^2, concluímos que seus lados medem $\sqrt{30}\text{cm}$; o quadrado *FHIJ* tem área igual a 20cm^2, logo seus lados medem $\sqrt{20}\text{cm}$. Temos então, *BA* = *EH* = $\sqrt{30}\text{cm}$ e *FH* = *AE* = $\sqrt{20}\text{cm}$. Utilizando o teorema de Pitágoras, podemos escrever $BE^2 = AB^2 + AE^2$, ou seja, a área do quadrado *BEFG* é 50cm^2.

TERCEIRA SOLUÇÃO:
(sem usar o teorema de Pitágoras): Os triângulos *ABE* e *EHF* são retângulos em *A* e *H*, respectivamente; a medida do ângulo $B\hat{E}F$ é de 90°; se a medida do ângulo $H\hat{E}F$ é *x*, então a medida dos ângulos $E\hat{F}H$ e $A\hat{E}B$ é $90° - x$ e, conseqüentemente, a medida do ângulo $A\hat{B}E$ é *x*; como *BE* = *EF* (são lados do mesmo quadrado), então os triângulos mencionados são congruentes (pelo caso ALA de congruência de triângulos). Como o quadrado *ABCD* tem área igual a 30cm^2, concluímos que seus lados medem $\sqrt{30}\text{cm}$; o quadrado *FHIJ* tem área igual a 20cm^2, logo seus lados medem $\sqrt{20}\text{cm}$. Temos então, *BA* = *EH* = $\sqrt{30}\text{cm}$ e *FH* = *AE* = $\sqrt{20}\text{cm}$. A área do trapézio *ABFH* é igual a $\frac{(AB + FH)}{2} \cdot AH = \left(\sqrt{30} + \sqrt{20}\right)^2 / 2 = 25 + \sqrt{20} \cdot \sqrt{30}.$
Como o trapézio é composto pelos triângulos *ABE*, *EHF* e *BEF* e a área dos triângulos congruentes *ABE* e *EHF* é $\sqrt{20} \cdot \sqrt{30} / 2$, concluímos que a área do triângulo *BEF* é $50 + \sqrt{20} \cdot \sqrt{30} - 2 \times \sqrt{20} \cdot \sqrt{30} / 2 = 25\text{cm}^2$.

CRITÉRIO DE CORREÇÃO:

- **Para resoluções completas:** atribuir **10 pontos** para uma solução completa equivalente às mostradas. Por solução completa se entende:

(a) mostrar ou demonstrar a congruência dos triângulos retângulos;

(b) usar Pitágoras para calcular a área do quadrado (direta ou indiretamente) ou usar a área do trapézio para achar a área da metade do quadrado e, em seguida, a área do quadrado.

- **Para resoluções parciais:**

(a) calculou corretamente os lados dos quadrados: **1 ponto** para cada quadrado.
(b) Explicou de forma convincente que *ABE* e *EHF* são congruentes (não é necessária menção explícita ao caso ALA ou LAAo de congruência): **3 pontos**.
(c) Intuiu que a área do quadrado mede 50cm^2 (palpite ou avaliação) sem explicar corretamente mas calculou a área do quadrado corretamente: **2 pontos**.

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 2:

Todo número inteiro positivo n pode ser escrito na forma $2^a \cdot b,\ a \ge 0,\ b > 0$ e b ímpar (chamamos b de parte ímpar de n). Considere dois números com a mesma parte ímpar: $n_1 = 2^{a_1} \cdot b$ e $n_2 = 2^{a_2} \cdot b$. Supondo, sem perda da generalidade, que se $a_1 < a_2$, então teremos que n_1 é divisor de n_2.

Assim, como de 1 a 26 temos 13 partes ímpares possíveis, a saber: 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23 e 25, cada um dos números deve ter uma parte ímpar diferente. Mais ainda, considerando que 1 divide todos os números inteiros, o número com parte ímpar 1 é o que deve ter maior *a*.

Porém $4 = 2^2 \cdot 1$ e está entre os números escolhidos, logo para os demais números escolhidos devemos ter *a* = 0 ou *a* = 1. E podemos determinar todas as escolhas possíveis:

- 3 é divisor de 9; 15 e 21. Logo $2 \cdot 3 = 6, 9, 15$ e 21 devem estar na nossa escolha.
- 5 é divisor de 15 e 25. Logo $2 \cdot 5 = 10$ e 25 devem estar na nossa escolha.
- 7 é divisor de 21. Logo $2 \cdot 7 = 14$ deve estar na nossa escolha.
- Com parte ímpar 11 podemos escolher 11 ou 22 e com parte ímpar 13, 13 ou 26. As demais escolhas são 17, 19 e 23.

Portanto as escolhas possíveis são (ordenadas segundo a parte ímpar):
4; 6; 10; 14; 9; 11 ou 22; 13 ou 26; 15; 17; 19; 21; 23; 25.

SEGUNDA SOLUÇÃO:

Se houvesse apenas a condição 2, poderíamos escolher os números 14, 15, 16,…,26. Porém temos de escolher o 4, o que nos impede de escolher os números 16, 20 e 24.
Olhando os números restantes que não são divisores os múltiplos de 4 (ou seja, 3, 5, 6, 7, 9, 10, 11), observamos que o número 10 pode ser adicionado as nossas escolhas e nenhum mais.
Ficamos, então, com 12 números: 4, 10, 14, 15, 17, 18, 19, 21, 22, 23, 25 e 26. Devemos tirar um deles, pelo menos, para acrescentar dois.
A retirada do 18 permite que acrescentemos o 6 e o 9, completando a nossa solução: 4, 6, 9, 10, 14, 15, 17, 19, 21, 22, 23, 25 e 26 (de fato, podemos colocar 11 no lugar de 22 ou 13 no lugar do 26).

CRITÉRIO DE CORREÇÃO:

Primeira Solução:

- Observar que os números escolhidos devem ter partes ímpares distintas (o estudante não precisa usar essa terminologia). **[4 pontos]**
- Observar que *a* = 0 ou *a* = 1, isto é, nenhum múltiplo de 4 pode ser escolhido **[1 ponto]**
  - 6 deve ser escolhido **[1 ponto]**
  - 10 deve ser escolhido **[1 ponto]**
  - 14 deve ser escolhido **[1 ponto]**
  - Conclusão **[2 pontos]**

Segunda Solução:

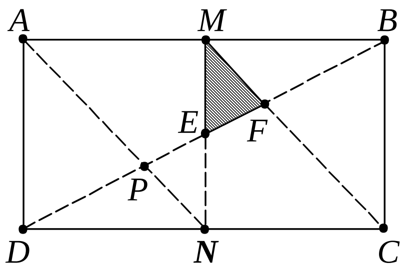
- Considerar os números maiores do que 13 que não são múltiplos de 4. **[2 pontos]**
- 10 pode ser escolhido **[2 pontos]**
- 6 e 9 podem ser escolhidos **[4 pontos]**
- Conclusão **[2 pontos]**

Caso o estudante apresente simplesmente a resposta, sem indicação de como a obteve:

- Resposta correta, ou seja, uma escolha correta de 13 números. **[8 pontos]**
- 12 números corretos. **[4 pontos]**
- 11 números corretos. **[2 pontos]**
- Menos de 11 números corretos. **[0 pontos]**

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 3:

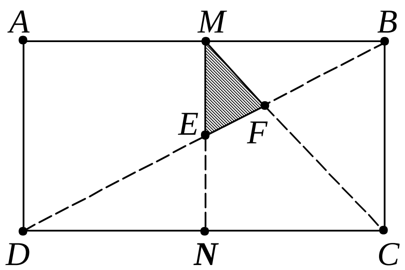
Vamos usar a notação [*X*] para denotar a área do polígono *X*.



Sejam *E* e *F* os pontos de interseção como mostrados na figura. Sejam $AB = 2^a$ e $BC = 2b$. Então $AM = MB = DN = NC = a$ e $ME = EN = b$. Trace *AN* e seja *P* o ponto de interseção dos segmentos *AN* e *BD*. Os segmentos *AN* e *MC* são paralelos (pois $AM = NC$ e $AM \parallel NC$).
Como *M* é ponto médio de *AB* e $MF \parallel AP$, temos que *F* é o ponto médio do segmento *PB*. Analogamente *P* é o ponto médio do segmento *DF*. Segue então que $DP = PF = FB$.
Por simetria verificamos que $PE = EF$ e então $EF/FB = 1/2$. Portanto, podemos escrever:

$$\frac{[MEF]}{[MBF]} = 1/2.$$

Mas, por outro lado, $[MBE] = \frac{1}{4}[ABD] = 125$, donde $[MEF] = \frac{1}{3}125 = \frac{125}{3}\text{cm}^2$ e $[MBF] = \frac{2}{3}125 = \frac{250}{3}\text{cm}^2$.



SEGUNDA SOLUÇÃO:

Observe que $ME \parallel BC$ e $MB \parallel DC$. Assim, temos as semelhanças de triângulo:

- ΔMEF ΔBCF (na razão de 1 : 2).

- $\Delta MBF \; \Delta CFD$ (na razão de 1 : 2).

Lembrando que a razão entre as áreas de duas figuras semelhantes é igual ao quadrado da razào de semelhança, temos: $[BCF]=4[MEF]$ e $[CDF]=4[MBF]$.

Também, $[BCD]=500$ (metade da área do retângulo) e área do $[MCB]=250$ (metade da área do retângulo *MNCB*, que é a metade da área do retângulo). Portanto,

$$[CFD]+[BCF]=[BCD]=500 \Rightarrow 4[MBF]+4[MEF]=500 \Rightarrow [MBF]+[MEF]=125 \quad (1)$$

e

$$[MBF]+[BCF]=[MCB]=250 \Rightarrow [MBF]+4[MEF]=250. \quad (2)$$

Subtraindo (1) de (2), obtemos $3[MEF]=125 \Rightarrow [MEF]=125/3$.

CRITÉRIO DE CORREÇÃO:

- Mostra que $\dfrac{[MEF]}{[MBF]}=1/2$ **[6 pontos]**
- Calcula $[MBE]=125$ **[2 pontos]**
- Conclui corretamente $[MEF]=125/3$ **[2 pontos]**

Segunda Solução:

- Mostra que $[BCF]=4[MEF]$ **[3 pontos]**
- Mostra que $[CDF]=4[MBF]$ **[3 pontos]**
- Conclui corretamente **[4 pontos]**

Outras Soluções:

- Demonstra corretamente que $[MEF]=125/3$ **[10 pontos]**

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 4:

Veja a solução e o critério de correção do Problema 3 da Parte B do Nível 1.

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 5:

(a) Fazendo $x = y = 1$, obtemos $[f(1)]^2 - f(1) = 2$, donde, resolvendo a equação, obtemos $f(1) = 2$ ou $f(1) = -1$. Este último valor não serve, pois o contra-domínio da função é o conjunto dos números reais estritamente positivos. Portanto, $f(1) = 2$.

(b) Fazendo $y = 1$ na identidade do problema obtemos $f(x)f(1) - f(x) = x + \dfrac{1}{x}$. Substituindo o valor de $f(1)$, obtemos a fórmula para $f(x)$: $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$.

CRITÉRIO DE CORREÇÃO:

- Substitui $x = y = 1$ **[2 pontos]**
- Chega a $f(1) = 2$ ou $f(1) = -1$ **[2 pontos]**
- Descarta a solução $f(1) = -1$ **[2 pontos]**
- Substitui $y = 1$ e obtém $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$ **[4 pontos]**

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 6:

Vamos separar o número de quatro dígitos em duas partes: os dois primeiros dígitos, da esquerda para a direita, formam o número *x* e os dois restantes formam o número *y*.

Então a propriedade significa que $100x + y = x^2 + y^2$. Esta igualdade pode ser considerada uma equação do segundo grau em *x*: $x^2 - 100x + y^2 - y = 0$. (3)

Resolvendo encontramos $x = 50 \pm \sqrt{2500 - (y^2 - y)}$. (4)

Com o exemplo do enunciado, *y* = 33 resulta em *x* = 12 com o sinal (–) na expressão:

$$x = 50 - \sqrt{1444} = 50 - 38 = 12.$$

Naturalmente outra solução aparece quando colocamos o sinal (+) na mesma expressão:

$$x_1 = 50 + \sqrt{1444} = 50 + 38 = 88.$$

Então outro número com a mesma propriedade é $8833 = 88^2 + 33^2$.

Comentários:

A equação $x^2 - 100x + y^2 - y = 0$ é equivalente a $(2x - 100)^2 + (2y - 1)^2 = 10.001$. Outra maneira de resolver o problema é então determinar todas as soluções inteiras (*m*, *n*) de $m^2 + n^2 = 10.001$, com *m* par e *n* ímpar Se dois números podem ser escritos como soma de dois quadrados, então o produto dos mesmos também pode, pois escrevendo $p = r^2 + s^2$ e $q = t^2 + u^2$, temos

$$pq = (r^2 + s^2)(t^2 + u^2) = (rt + ts)^2 + (ru - st)^2.$$

Observando que $10.001 = 73 \times 137 = (8^2 + 3^2) \times (11^2 + 4^2)$, obtemos

$$(8^2 + 3^2) \times (11^2 + 4^2) = (8 \times 11 + 3 \times 4)^2 + (8 \times 4 - 3 \times 11)^2 = 100^2 + 1^2$$

$$(8^2 + 3^2) \times (4^2 + 11^2) = (8 \times 4 + 11 \times 3)^2 + (8 \times 11 - 3 \times 4)^2 = 65^2 + 76^2$$

é possível mostrar que todas as maneiras de escrever 10001 como soma de dois quadrados são as do tipo (*m*, *n*) = (±100, ±1) ou (*m*, *n*) = (±65, ±76) e suas permutações.

A primeira solução nos dá 2*x* – 100 = ±100, resultado em *x* = 0 ou *x* = 100, que não servem para o problema.

A segunda solução resulta em 2*y* – 1 = 65 e 2*x* – 100 = ±76, donde obtemos (*x*, *y*) = (88, 33) ou (*x*, *y*) = (12, 33).

CRITÉRIO DE CORREÇÃO:

- Obtém outro número biquadrado (usando a equação ou de qualquer outro modo) **[10 pontos]**

CRITÉRIO PARA SOLUÇÕES PARCIAIS:

- Arma e equação $x^2 - 100x + y^2 - y = 0$ **[1 ponto]**
- Reduz explicitamente o problema a encontrar os valores de *y* para os quais $\sqrt{2500 - (y^2 - y)}$ é inteiro ou a encontraras soluções de $(2x - 100)^2 + (2y - 1)^2 = 10001$ **[3 pontos]**