

XXVII OLIMPIÁDA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA
TERCEIRA FASE – NÍVEL 2 (7ª. e 8ª. Séries)
PRIMEIRO DIA

PROBLEMA 1

Num tabuleiro quadrado 5×5 , serão colocados três botões idênticos, cada um no centro de uma casa, determinando um triângulo.

De quantas maneiras podemos colocar os botões formando um triângulo retângulo com catetos paralelos às bordas do tabuleiro?

PROBLEMA 2

No triângulo retângulo ABC , os catetos AB e BC medem, respectivamente, 3 cm e 4 cm. Seja M o ponto médio da hipotenusa AC e seja D um ponto, distinto de A , tal que $BM = MD$ e $AB = BD$.

- a) Prove que BM é perpendicular a AD .
- b) Calcule a área do quadrilátero $ABDC$.

PROBLEMA 3

Dado que $\frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{(a+b)(b+c)(c+a)} = \frac{1}{11}$, qual é o valor de $\frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a}$?

XXVII OLIMPIÁDA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA
TERCEIRA FASE – NÍVEL 2 (7ª. e 8ª. Séries)
SEGUNDO DIA

PROBLEMA 4

Em seu treino diário de natação, Esmeraldinho percorre várias vezes, com um ritmo constante de braçadas, o trajeto entre dois pontos A e B situados na mesma margem de um rio. O nado de A para B é a favor da corrente e o nado em sentido contrário é contra a corrente. Um tronco arrastado pela corrente passa por A no exato instante em que Esmeraldinho sai de A . Esmeraldinho chega a B e imediatamente regressa a A . No trajeto de regresso, cruza com o tronco 6 minutos depois de sair de A . A seguir, Esmeraldinho chega a A e imediatamente sai em direção a B , alcançando o tronco 5 minutos depois da primeira vez que cruzou com ele ao ir de B para A . Quantos minutos o tronco leva para ir de A até B ?

PROBLEMA 5

Prove que o número $1^{2005} + 2^{2005} + 3^{2005} + \dots + 2005^{2005}$ é múltiplo de $1 + 2 + 3 + \dots + 2005$.

PROBLEMA 6

A medida do ângulo B de um triângulo ABC é 120° . Sejam M um ponto sobre o lado AC e K um ponto sobre o prolongamento do lado AB , tais que BM é a bissetriz interna do ângulo $\angle ABC$ e CK é a bissetriz externa correspondente ao ângulo $\angle ACB$. O segmento MK intersecta BC no ponto P . Prove que $\angle APM = 30^\circ$.