

XXIX OLIMPIÁDA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA
TERCEIRA FASE – NÍVEL 3 (Ensino Médio)
PRIMEIRO DIA

PROBLEMA 1

Seja $f(x) = x^2 + 2007x + 1$. Prove que, para todo n inteiro positivo, a equação $\underbrace{f(f(\dots(f(x))\dots))}_{n \text{ vezes}} = 0$ tem pelo menos uma solução real.

PROBLEMA 2

Para quantos números inteiros c , $-2007 \leq c \leq 2007$, existe um inteiro x tal que $x^2 + c$ é múltiplo de 2^{2007} ?

PROBLEMA 3

São dados n pontos no plano, os quais são os vértices de um polígono convexo. Prove que o conjunto das medidas dos lados e das diagonais do polígono tem pelo menos $\lfloor n/2 \rfloor$ elementos distintos.

Observação: $\lfloor x \rfloor$ denota o maior número inteiro que não excede x . Por exemplo, $\lfloor 2,5 \rfloor = 2$, $\lfloor 3 \rfloor = 3$ e $\lfloor -1,2 \rfloor = -2$.

XXIX OLIMPIÁDA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA
TERCEIRA FASE – NÍVEL 3 (Ensino Médio)
SEGUNDO DIA

PROBLEMA 4

Arrumam-se 2007^2 quadradinhos iguais, formando um tabuleiro 2007×2007 . Arnaldo e Bernaldo disputam o seguinte jogo: cada jogada de Arnaldo consiste em retirar 4 quadradinhos que formem um quadrado 2×2 . Cada jogada de Bernaldo consiste em retirar apenas 1 quadradinho. Os jogadores jogam alternadamente, sendo Arnaldo o primeiro a jogar. Quando Arnaldo não puder fazer sua jogada, Bernaldo fica com todas as peças restantes do tabuleiro. Ganha o jogo aquele que possuir mais quadradinhos no final. É possível que Bernaldo ganhe o jogo, não importando como Arnaldo jogue?

PROBLEMA 5

Seja $ABCD$ um quadrilátero convexo, P a interseção das retas AB e CD , Q a interseção das retas AD e BC e O a interseção das diagonais AC e BD . Prove que se $\angle POQ$ é um ângulo reto então PO é bissetriz de $\angle AOD$ e QO é bissetriz de $\angle AOB$.

PROBLEMA 6

Dados números reais $x_1 < x_2 < \dots < x_n$, suponha que todo número real ocorre no máximo duas vezes entre as diferenças $x_j - x_i$, com $1 \leq i < j \leq n$. Prove que há pelo menos $\lfloor n/2 \rfloor$ números reais que ocorrem exatamente uma vez entre tais diferenças.

Observação: caso você tenha se esquecido da prova de ontem, $\lfloor x \rfloor$ denota o maior número inteiro que não excede x . Por exemplo, $\lfloor 2,5 \rfloor = 2$, $\lfloor 3 \rfloor = 3$ e $\lfloor -1,2 \rfloor = -2$.