XXV OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA
TERCEIRA FASE – NÍVEL 3 (Ensino Médio)
PRIMEIRO DIA

PROBLEMA 1:
Determine o menor número primo positivo que divide $x^2+5x+23$ para algum inteiro *x*.

PROBLEMA 2:
Seja *S* um conjunto de *n* elementos. Determine o menor inteiro positivo *k* com a seguinte propriedade: dados quaisquer *k* subconjuntos distintos $A_1, A_2, ..., A_k$ de *S*, existe uma escolha adequada dos sinais + e – de modo que $S = A_1^{\pm} \cup A_2^{\pm} \cup ... \cup A_k^{\pm}$, onde $A_i^{+} = A_i$ e $A_i^{-} = S - A_i$ é o complementar de A_i em relação a *S*.

PROBLEMA 3:
Seja *ABCD* um losango. Sejam *E*, *F*, *G* e *H* pontos sobre os lados *AB*, *BC*, *CD* e *DA*, respectivamente, e tais que as retas *EF* e *GH* são tangentes à circunferência inscrita no losango.
Prove que as retas *EH* e *FG* são paralelas.

XXV OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA
TERCEIRA FASE – NÍVEL 3 (Ensino Médio)
SEGUNDO DIA

PROBLEMA 4:
São dados: uma circunferência *K* e um ponto *A* interior, fixo, distinto do centro. Determine os pontos *B*, *C* e *D* sobre a circunferência de forma que a área do quadrilátero *ABCD* seja a maior possível.

PROBLEMA 5:
Suponha que $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ satisfaz:

i) $x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$

ii) $f\left(\dfrac{2xy}{x+y}\right) \geq \dfrac{f(x) + f(y)}{2}$, para todo $x, y \in (0, +\infty)$.

Prove que existe $x_0 \in (0, +\infty)$ tal que $f(x_0) < 0$.

PROBLEMA 6:
Um grafo cujo conjunto de vértices *V* tem *n* elementos é *bacana* se existir um conjunto $D \subset \mathbb{N}$ e uma função injetiva $f : V \to \left[1, n^2/4\right] \cap \mathbb{N}$ tal que os vértices *p* e *q* são ligados por uma aresta se e somente se $\left|f(p) - f(q)\right| \in D$.
Mostre que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n_0$ existem grafos com *n* vértices que não são bacanas.

Observação: Um grafo com conjunto de vértices *V* é um par (*V*, *E*) onde *E* é um conjunto de subconjuntos de *V*, todos com exatamente dois elementos.
Um conjunto {*p*, *q*} é chamado de *aresta* se pertencer a *E* e neste caso dizemos que esta aresta liga os vértices *p* e *q*.