XXV OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA
SEGUNDA FASE – NÍVEL UNIVERSITÁRIO
PRIMEIRO DIA

PROBLEMA 1:
São dados uma parábola e um ponto A fora dela. Para cada ponto P da parábola, seja t a tangente à parábola por P e r a reta paralela ao eixo da parábola por P. A reta perpendicular a t por A corta r em Q. Prove que, ao variar P, o ponto Q percorre uma hipérbole equilátera.

PROBLEMA 2:

a) Sejam p e $q \in \mathbb{C}[x]$ polinômios primos entre si com coeficientes complexos. Suponha que existam 4 vetores $(a,b) \in \mathbb{C}^2$, dois a dois linearmente independentes (sobre $\mathbb{C}$), tais que $ap + bq$ é o quadrado de um polinômio em $\mathbb{C}[x]$. Prove que p e q são constantes.

b) Prove que não existem polinômios não constantes r, s, t, u $\in \mathbb{C}[x]$ tais que $f = \frac{r}{s}$, $g = \frac{t}{u}$ e $f^2 = g(g-1)(g-a)$, onde $a \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$, $a \neq 1$.

PROBLEMA 3:
Seja $p > 2$ um número primo.
Seja X_p o conjunto de todas as matrizes quadradas A com coeficientes em $\mathbb{Z}/(p)$ e de ordem 4 para as quais $A^2 = I$: $X_p = \left\{ A \in \left(\mathbb{Z}/(p)\right)^{4\times 4} \,\middle|\, A^2 = I \right\}$
Calcule o número de elementos de X_p.

Observação: $\mathbb{Z}/(p) = \{0, 1, 2, \ldots, p-1\}$ é o corpo finito com p elementos. A soma e o produto são definidos módulo p; assim, por exemplo, em $\mathbb{Z}/(7)$, 4 + 5 = 2 e 4 · 5 = 6.

XXV OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA
SEGUNDA FASE – NÍVEL UNIVERSITÁRIO
SEGUNDO DIA

PROBLEMA 4:

Temos um dado de 6 faces, não necessariamente honesto. Jogamos o dado três vezes e obtemos resultados *a*, *b* e *c*. Prove que $P(a = c \mid a = b) \geq P(a = c \mid a \neq b)$ e que vale a igualdade se e somente se o dado é honesto.

Observação: $P(a = c \mid a = b)$ é a probabilidade condicional

$$P(a = c \mid a = b) = \frac{P(a = b = c)}{P(a = b)}.$$

Um dado é honesto se a probabilidade de cada face é $\frac{1}{6}$.

PROBLEMA 5:

Uma função $f : (-1,1) \to \mathbb{R}$ de classe C^∞ é *bacana* se existem um inteiro positivo *n* e polinômios $P_j \in \mathbb{R}[t],\ 0 \leq j \leq n,$ com P_n não identicamente nulo tais que $\sum_{j=0}^{n} P_j(t) f^{(j)}(t) = 0,$ para todo $t \in (-1,1).$ Prove que se *f* e *g* são bacanas então $f + g$ e $f \cdot g$ também são bacanas.

Observação: Definimos $f^{(0)} = f$ e, para cada inteiro $m \geq 0,$ $f^{(m+1)} = (f^{(m)})'.$

PROBLEMA 6:

Seja $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ uma matriz tal que $a_{ij} \in \{0,1\},$ para quaisquer i, j e $\left|\{(i,j) \mid a_{ij} = 1\}\right| \geq \frac{99}{100} \cdot n^2.$ Prove que $tr(A^k) \geq \left(\frac{n}{2}\right)^k,$ para todo $k \geq 2.$

Observação: Se $B = (b_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ é uma matriz quadrada então $tr(B) = \sum_{i=1}^{n} b_{ii}$ denota o traço de *B*.