XX Semana Olímpica – 2017 – Nível II

Problemas bonitinhos com soluções belas

Ana Karoline

1) Seja ABC um triângulo, e seja M o ponto médio de BC. Sendo I_b e I_c os incentros de AMB e AMC, prove que a segunda interseção dos circuncírculos de ABI_b e ACI_c distinto de A pertence a reta AM.

2) Seja ABC um triângulo. Pegue o ponto D em AB e o ponto E em AC tal que $DE||BC$. A reta DE intersecta o circuncírculo de ABC em dois pontos distintos F e G tal que os segmentos de reta BF e CG se intersectam em P. Dado que o circuncentro de GDP e FEP intersectam-se novamente em Q, prove que A, P, Q são colineares.

3) Dado $ABCD$ um quadrilátero convexo, seja E a interseção das bissetrizes dos ângulos $\angle B$ e $\angle C$. Dado F a interseção dos segmentos $\overrightarrow{BA}$ e $\overrightarrow{CD}$, prove que se $AB + CD = BC$, então A, D, E, F são concíclicos.

4) Dado $\triangle ABC$ um triângulo acutângulo, com O sendo seu circuncentro. O ponto H é o pé da perpendicular de A para a reta $\overleftrightarrow{BC}$, e os pontos P e Q são os pés das perpendiculares de H para as retas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{AC}$, respectivamente. Dado que $AH^2 = 2 \cdot AO^2$, prove que os pontos $O, P,$ e Q são colineares.

5) Sejam A, B, C, D pontos distintos em uma reta, nesta ordem. As circunferências Γ_1 e Γ_2 de diâmetros AC e BD se intersectam em X e Y. O é um ponto arbitrário da reta XY, não situado em AD. CO intersecta Γ_1 novamente em M, e BO intersecta Γ_2 novamente em N. Prove que AM, DN e XY são concorrentes.

6) Dado $ABCD$ um quadrilátero cíclico, seja X a interseção das diagonais AC e BD. Dado C_1, D_1 e M pontos médios dos segmentos CX, DX e CD, respectivamente. As retas AD_1 e BC_1 se intersectam em Y, e a reta MYintersecta as diagonais ACe BDem diferentes pontos E e F, respectivamente. Prove que a reta XY é tangente à circunferência passando por E, F e X.

7) Seja D e E dois pontos nos lados AB e AC, respectivamente, do triângulo ABC, tal $DB = BC = CE$, e seja F o ponto de interseção das retas CD e BE. Prove que o incentro I do triângulo ABC, o ortocentro H do triângulo DEF e o ponto médio do arco BAC do circuncírculo do triângulo ABC são colineares.

8) Duas circunferências, ω_1 e ω_2, de igual raio intersectam-se em diferentes pontos X_1 e X_2. Considere a circunferência ω externamente tangente a ω_1 no ponto T_1, e internamente tangente a ω_2 no ponto T_2. Prove que as retas X_1T_1 e X_2T_2 se intersectam em um ponto sobre ω_2.