Problemas com coberturas e partições de inteiros
Soluções dos problemas da aula

Carlos Shine

1. Prove que o número de partições em que apenas as partes ímpares podem ser repetidas é igual ao número de partições de n em que nenhuma parte aparece mais do que três vezes.

   Solução. A função geratriz das partições do primeiro tipo é

$$A(x) = (1 + x + x^2 + \cdots)(1 + x^2)(1 + x^3 + x^6 + \cdots)(1 + x^4)\ldots = \prod_{k\ge 1} \frac{1 + x^{2k}}{1 - x^{2k-1}}$$
$$= \prod_{k\ge 1} \frac{1 - x^{4k}}{(1 - x^{2k-1})(1 - x^{2k})} = \prod_{4\nmid n} \frac{1}{1 - x^n},$$

   pois os $1 - x^{4k}$ se cortam com alguns dos $1 - x^{2\ell}$, e sobram os ímpares e os pares que não são múltiplos de 4, ou seja, todos os números que não são múltiplos de 4.

   A função geratriz das partições do segundo tipo é

$$B(x) = (1 + x + x^2 + x^3)(1 + x^2 + x^4 + x^6)\ldots = \prod_{k\ge 1} \frac{1 - x^{4k}}{1 - x^k} = \prod_{4\nmid n} \frac{1}{1 - x^n},$$

   pois os $1 - x^{4k}$ se cortam com alguns dos $1 - x^{\ell}$ e sobram os que não são múltiplos de 4.

   Como $A(x) = B(x)$, as duas quantidades são iguais. Em particular, são iguais à quantidade de partições de n em partes que não são múltiplas de 4.

---

2. Determine se existe um conjunto X de inteiros não negativos com a seguinte propriedade: para cada inteiro não negativo n a equação $a + 2b = n$ tem exatamente uma solução com $a, b \in X$.

   Solução. Seja $P(x) = \sum_{k\in X} x^k$. Então a função geratriz de $a + 2b$, $a, b \in X$ é $\sum_{a,b\in X} x^{a+2b} = \sum_{a\in X} x^a \sum_{b\in X} (x^2)^b = P(x)P(x^2)$. Logo, como cada inteiro não negativo aparece na forma $a+2b$ exatamente uma vez,

$$P(x)P(x^2) = 1 + x + x^2 + \cdots = \frac{1}{1 - x}.$$

   Vamos resolver essa equação funcional (ou seria “equação serie-formal”?):

$$P(x) = \frac{P(x)P(x^2)}{P(x^2)P(x^4)} \frac{P(x^4)P(x^8)}{P(x^8)P(x^{16})} \frac{P(x^{16})P(x^{32})}{P(x^{32})P(x^{64})} \cdots$$
$$= \frac{1 - x^2}{1 - x} \frac{1 - x^8}{1 - x^4} \frac{1 - x^{32}}{1 - x^{16}} \cdots = (1 + x)(1 + x^4)(1 + x^{16})\ldots = \prod_{k\ge 0} (1 + x^{4^k}).$$

   Assim, $X = \{1, 4, 16, 17, 20, 21, \ldots\}$ é o conjunto das somas de potências distintas de 4.

---

4. Se X e Y são conjuntos de n números reais com interseção vazia, dizemos que X *ganha de* Y se a quantidade de pares ordenados (x, y) com $x \in X$, $y \in Y$ e $x > y$ é maior do que a quantidade de pares ordenados (x, y) com $x \in X$, $y \in Y$ e $x < y$.

   Prove que, para cada inteiro $n \ge 5$, é possível dividir o conjunto $\{1, 2, 3, \ldots, 3n\}$ em três conjuntos A, B, C com n elementos cada um tais que a interseção entre dois desses conjuntos quaisquer é vazia, A ganha de B, B ganha de C e C ganha de A.

Solução. A ideia é dividir $\{1,2,\ldots,3n\}$ em seis partes quase iguais $S_1, S_2, \ldots, S_6$, em que S_1 tem os menores números, S_2 os segundo menores números, e assim por diante. Faça $A = S_1 \cup S_5$, $B = S_3 \cup S_4$ e $C = S_2 \cup S_6$. Assim basta $|S_5|(|S_3|+|S_4|) > |S_1|(|S_3|+|S_4|) \iff |S_5| > |S_1|$, $|S_2|(|S_3|+|S_4|) > |S_6|(|S_3|+|S_4|) \iff |S_2| > |S_6|$ e $|S_2||S_1| + |S_6|(|S_1|+|S_5|) > |S_5||S_2|$ (esse último tende a ser verdade se os $|S_i|$'s são quase iguais).

Para $n = 2k+1$, tome

$$A = \{1,2,3,\ldots,k\} \cup \{4k+3, 4k+4, 4k+5, \ldots, 5k+3\}$$
$$B = \{2k+2, 2k+3, 2k+4, \ldots, 4k+2\}$$
$$C = \{k+1, k+2, k+3, \ldots, 2k+1\} \cup \{5k+4, 5k+5, 5k+6, \ldots, 6k+3\}.$$

Para $n = 2k$, tome

$$A = \{1,2,3,\ldots,k-1\} \cup \{4k+1, 4k+2, 4k+3, \ldots, 5k+1\}$$
$$B = \{2k+1, 2k+3, 2k+4, \ldots, 4k\}$$
$$C = \{k, k+1, k+2, \ldots, 2k\} \cup \{5k+2, 5k+3, 5k+4, \ldots, 6k\}.$$

---

5. Dados conjuntos de naturais A, B, para cada natural n denote por $r(A,B,n)$ o número de soluções da equação $a+b=n$, $a \in A$, $b \in B$. Prove que existe n_0 tal que $r(A,B,n+1) > r(A,B,n)$ para todo $n > n_0$ se, e somente se, o complemento de A e o complemento de B são finitos.

   Solução. A relação crucial para a solução é

   $$r(A,B,n) + r(\overline{A},B,n) + r(A,\overline{B},n) + r(\overline{A},\overline{B},n) = r(\mathbb{N},\mathbb{N},n) = n-1.$$

   A primeira igualdade vem da partição de $\mathbb{N}^2 = A \times B \cup \overline{A} \times B \cup A \times \overline{B} \cup \overline{A} \times \overline{B}$ e a segunda, do fato de que $x+y=n$ tem $n-1$ soluções naturais (entenderemos $\mathbb{N}$ como inteiros positivos - se for inteiros não negativos, o resultado não muda).

   Se $\overline{A}$ e $\overline{B}$ são finitos, se $n > n_0 = \max\overline{A} + \max\overline{B}$ então $r(\overline{A},\overline{B},n) = 0$ pois n é grande demais para ser soma de um elemento de $\overline{A}$ e um elemento de $\overline{B}$, $r(\overline{A},B,n) = |\overline{A}|$, pois se $a \in \overline{A}$ então $n - a > \max\overline{B} \implies n - a \in B$, ou seja, para cada $a \in \overline{A}$ existe um elemento de B para dar soma n. Analogamente, $r(A,\overline{B},n) = |\overline{B}|$. Com isso, $r(A,B,n) = n-1-|\overline{A}|-|\overline{B}|$ é crescente para $n > n_0$.

   Se $r(A,B,n)$ é crescente, de

   $$r(A,B,n) = n-1-(r(\overline{A},B,n) + r(A,\overline{B},n) + r(\overline{A},\overline{B},n)) < n$$

   temos que existe c tal que $r(A,B,n) \ge n-1-c$ para todo n. Com isso,

   $$r(\overline{A},B,n) + r(A,\overline{B},n) + r(\overline{A},\overline{B},n) \le c \implies r(\overline{A},\mathbb{N},n) < c.$$

   Mas $r(\overline{A},\mathbb{N},n) = |\{1,2,\ldots,n-1\} \cap \overline{A}|$, pois para obter n a partir de um elemento de $\overline{A}$ somamos o que falta para n. Assim, se $\overline{A}$ é infinito então $r(\overline{A},\mathbb{N},n)$ é ilimitado, absurdo. Logo $\overline{A}$ e, analogamente, $\overline{B}$ são finitos.

---

9. Sejam $n+1$ inteiros $0 = a_0 < a_1 < \ldots < a_n = 2n-1$. Encontre a menor cardinalidade que o conjunto $\{a_i + a_j : 0 \le i \le j \le n\}$ pode ter.

   Solução. Resposta: $3n$.

   Seja $A = \{a_0, a_1, \ldots, a_n\}$. A ideia principal é ver módulo $2n-1$. Sendo $B = \{a_i \bmod 2n-1\}$, temos $|B| = n$ pois $a_0 = 0 \equiv 2n-1 = a_n \pmod{2n-1}$.

   Queremos o mínimo de $|A+A|$. Vendo módulo $2n-1$, temos $|B+B|$ com $|B| = n$. Como $C = \{c - a_i \bmod 2n-1\}$ e B têm n elementos cada um, num total de $2n$ elementos, e há $2n-1$

números módulo $2n-1$, $C \cap B \neq \emptyset$, de modo que existe x tal que $x \equiv c - a_i \equiv a_j \pmod{2n-1} \implies a_i + a_j \equiv c \pmod{2n-1}$. Em outras palavras, como podemos variar c, $A+A$ cobre todos os resíduos módulo $2n-1$.

Agora vamos contar as repetições (como, por exemplo, 0 e $2n-1$). Um subconjunto de $A+A$ é $(A+\{0\}) \cup (A+\{2n-1\})$. Mas $(A+\{0\}) \cap (A+\{2n-1\}) = \{2n-1\}$ pois cada elemento de $A+\{0\}$ é no máximo $2n-1$ e cada elemento de $A+\{2n-1\}$ é pelo menos $2n-1$. Logo $|(A+\{0\}) \cup (A+\{2n-1\})| = n+1+n+1-1 = 2n+1$.

Por outro lado, vendo tudo módulo $2n-1$, temos $A+\{0\} \equiv A+\{2n-1\} \equiv A \equiv B \pmod{2n-1}$, e $(A+\{0\}) \cup (A+\{2n-1\}) \bmod 2n-1 = B$ tem n elementos, sobrando $2n+1-n = n+1$ repetições módulo $2n-1$. Somando os $2n-1$ restos que já temos, dá um total de pelo menos $2n-1+n+1 = 3n$ elementos em $A+A$.

Um exemplo com $3n$ somas é $a_i = i$, $1 \le i < n$. As somas vão de 0 até $2(n-1) = 2n-2$ para somas sem o $2n-1$, de $2n-1$ a $3n-2$ para somas com o $2n-1$ e outro número, e $4n-2$, num total de $3n$ somas.

---

11. Seja n um inteiro positivo. Encontre o menor inteiro positivo k com a seguinte propriedade: dados reais quaisquer $a_1, a_2, \ldots, a_d$ tais que $a_1 + a_2 + \cdots + a_d = n$ e $0 \le a_i \le 1$ para $i = 1, 2, \ldots, d$, é possível particionar esses números em k grupos, alguns dos quais possivelmente vazios, tais que soma dos números em cada grupo é no máximo 1.

Solução. Resposta: $k = 2n-1$.

Para $d = 2n-1$ se tomarmos $a_i = \frac{n}{2n-1} > \frac{1}{2}$, não podemos juntar dois números, e $k = 2n-1$. Afirmamos que $k = 2n-1$ é o menor inteiro nessas condições. Para tanto, provamos que, para todo d, é possível dividir em $2n-1$ grupos. Se $d < 2n$ basta colocar um número em cada grupo.

Se $d \ge 2n-1$, faça por indução. Para $d = 2n-1$, um número em cada grupo. Para $d \ge 2n$, como há $2n$ números com soma n, existem dois com soma menor ou igual a 1, e juntamos esses dois números em um novo número, reduzindo o problema ao caso $d-1$, que dá certo por hipótese de indução.

---

16. Seja n um inteiro positivo, e seja A um subconjunto de $\{1, 2, \ldots, n\}$. Uma *A-partição* de n em k partes é uma representação de n como uma soma $n = a_1 + \cdots + a_k$ em que as partes $a_1, \ldots, a_k$ pertencem a A e não são necessariamente distintas. O *número de partes diferentes* em uma partição é a quantidade de elementos (distintos) no conjunto $\{a_1, \ldots, a_k\}$.

Dizemos que uma A-partição de n em k partes é *otimal* se não existe A-partição de n em r partes com $r < k$. Prove que toda A-partição otimal de n contém no máximo $\sqrt[3]{6n}$ partes diferentes.

Solução. Sejam $b_1 < b_2 < \ldots < b_\ell$ as partes distintas de uma A-partição otimal de n em k partes. Queremos provar que $\ell \le \sqrt[3]{6n} \iff n \ge \frac{\ell^3}{6}$. A ideia é estimar somas de elementos distintos de B, que são todas menores do que n, pois a maior soma possível é

$$b_1 + b_2 + \cdots + b_\ell \le a_1 + a_2 + \cdots + a_k = n.$$

Se T e T' são conjuntos de índices tais que

$$\sum_{i \in T} b_i = \sum_{i \in T'} b_i$$

e $|T| < |T'|$, podemos trocar os b_i's, $i \in T'$ por b_i's, $i \in T$ (ou seja, trocamos uma cópia dos caras de T por uma cópia dos caras de T'), e a partição não era otimal, absurdo. O mesmo ocorre se $|T| > |T'|$. Logo se duas somas de elementos distintos de B são iguais, $|T| = |T'|$, ou seja, as quantidades de parcelas são iguais.

Com isso, podemos contar x_j, a quantidade de somas distintas com j parcelas distintas, como não há repetições entre quantidades diferentes de elementos de B, e cada soma é menor ou igual a n,

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_\ell \le n.$$

Agora provemos que $x_j \geq j(\ell - j) + 1$. Para isso é só achar $j(\ell - j) + 1$ somas distintas. A menor é $b_1 + b_2 + \cdots + b_j$ e a maior é $b_{\ell-j+1} + b_{\ell-j+2} + \cdots + b_\ell$. Usamos o seguinte algoritmo: enquanto pudermos aumentar um dos índices em uma unidade o fazemos, obtendo uma soma maior. Só não dá para fazer isso na maior soma de todas. Considerando a soma dos índices como invariante (aumenta um a cada passo), temos $(\ell - j + 1) + (\ell - j + 2) + \cdots + \ell - (1 + 2 + \cdots + j) = j(\ell - j)$ passos e, portanto $j(\ell - j) + 1$ somas distintas. Com isso,

$$n \geq \sum_{j=1}^{\ell} x_j \geq \sum_{j=1}^{\ell} (j(\ell - j) + 1) = \ell \cdot \frac{\ell(\ell+1)}{2} - \frac{\ell(\ell+1)(2\ell+1)}{6} + \ell = \frac{\ell^2(\ell+5)}{6} > \frac{\ell^3}{6},$$

como queríamos demonstrar.