Encontre a maior/menor quantidade de...

Carlos Shine

Muitos problemas de olimpíada (e de pesquisa!) perguntam qual é a maior ou o menor valor de algo para que uma entidade tenha uma propriedade.

Vamos ver algumas técnicas para lidar com esse tipo de problema.

1 Estimativas e exemplos

A grande maioria dos problemas desse tipo exigem duas coisas: um exemplo e uma estimativa para mostrar que não é possível melhor.

Exemplo 1. Em um tabuleiro 8×8 distribuímos os inteiros de 1 a 64, um em cada casa.

A seguir, colocam-se sobre o tabuleiro fichas quadradas 2×2, que cobrem exatamente quatro casas (sem superposição) e de modo que os quatro números cobertos por cada ficha determinem uma soma menor que 100.

Mostrar uma distribuição desses inteiros que permita colocar o maior número de fichas, e demonstrar que não é possível obter uma distribuição que permita colocar mais fichas.

Solução. A primeira providência desse problema é ver se dá para preencher todo o tabuleiro. Mas $1 + 2 + 3 + \cdots + 64 = \frac{64 \cdot 65}{2} = 2080 > 16 \cdot 100$, e não dá para usar 16 fichas.

(Parêntesis rápido: de onde vem a conta $1 + 2 + 3 + \cdots + 64 = \frac{64 \cdot 65}{2}$? A ideia é notar que $1 + 64 = 2 + 63 = \cdots = 32 + 33 = 65$, num total de $64/2 = 32$ somas. Por isso a soma é $32 \cdot 65$.)

Agora, como queremos que as somas sejam pequenas, é melhor tentar cobrir os números menores. Se usarmos k fichas, cobrimos uma soma maior ou igual a $1 + 2 + \cdots + 4k = \frac{4k(4k+1)}{2} = 8k^2 + 2k$. Essa soma deve ser menor do que $100k$, então $8k^2 + 2k < 100k \iff k \le 12$. Com isso, mostramos que o máximo é 12, certo?

Errado! Precisamos mostrar um exemplo (não só porque o enunciado disse; isso faria parte do problema mesmo se não fosse citado). É só ver como montar as quádruplas de números, já que temos liberdade sobre o tabuleiro. Considerando o parêntesis anterior e que a soma é $8 \cdot 12^2 + 2 \cdot 12 = 1176$, que é perto de 1200, as somas devem ser todas próximas de 99. Usando a ideia do parêntesis, podemos formar as quádruplas $\{1, 2, 47, 48\}$, $\{3, 4, 45, 46\}$, ..., $\{23, 24, 25, 26\}$, todas com soma 98. O tabuleiro pode ser

1	2	3	4	5	6	7	8
47	48	45	46	43	44	41	42
9	10	11	12	13	14	15	16
39	40	37	38	35	36	33	34
17	18	19	20	21	22	23	24
31	32	29	30	27	28	25	26
49	50	51	52	53	54	55	56
57	58	59	60	61	62	63	64

Finalmente, observamos que a solução da prova não precisa ser tão longa. Para dar o exemplo, aí vai uma solução completa e mais curta (e, para correção, preferível):

Início da solução

Se usarmos k fichas, cobrimos uma soma maior ou igual a $1 + 2 + \cdots + 4k = \frac{4k(4k+1)}{2} = 8k^2 + 2k$. Essa soma deve ser menor do que $100k$, então $8k^2 + 2k < 100k \iff k \leq 12$. O seguinte exemplo mostra que $k = 12$ é possível. Usamos as fichas nas primeiras seis linhas do tabuleiro.

1	2	3	4	5	6	7	8
47	48	45	46	43	44	41	42
9	10	11	12	13	14	15	16
39	40	37	38	35	36	33	34
17	18	19	20	21	22	23	24
31	32	29	30	27	28	25	26
49	50	51	52	53	54	55	56
57	58	59	60	61	62	63	64

Final da solução

1.1 Problemas

1. Seja M o conjunto dos números inteiros de 1 até 2013 inclusive.

   A cada um dos subconjuntos de M atribuímos uma das k cores disponíveis, com a condição de que, se dois conjuntos distintos A e B cumprem que $A \cup B = M$, então aos conjuntos A e B são atribuídas cores distintas. Qual é o menor valor possível que pode ter k?

2. Diremos que um número de 20 dígitos é *especial* se é impossível representá-lo como produto de um número de 10 dígitos por um número de 11 dígitos. Determine qual é a máxima quantidade possível de números consecutivos que são *especiais*.

3. Daniel escreveu em uma lousa, de cima para baixo, uma lista de números inteiros positivos menores ou iguais a 10. Ao lado de cada número da lista de Daniel, Martín anotou a quantidade de vezes que esse número aparece na lista de Daniel e obteve assim uma lista de mesmo tamanho.

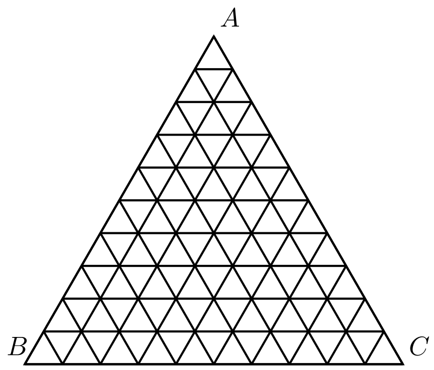
   Se lemos a lista de Martín de baixo para cima obtemos a mesma lista de números que Daniel escreveu de cima para baixo. Encontre o maior tamanho que a lista de Daniel pode ter.

2 Invariantes

Muitas vezes, uma maneira de obter um limitante usa um *invariante*, que é... algo que nunca varia! Geralmente um invariante introduz um fator limitante; se certos objetos sempre respeitam uma regra, ela limita, em algum grau, as possibilidades. Quanto melhor o invariante, melhor ele limita as possibilidades.

Exemplo 2. Um triângulo equilátero ABC é dividido em 100 triângulos equiláteros congruentes. Qual é a maior quantidade de vértices dos triângulos que podemos escolher de modo que não haja dois deles em alguma reta paralela a algum dos lados do triângulo ABC?

Solução. Primeiro, vamos conhecer melhor o nosso triângulo:



Um invariante bem bacana em triângulos equiláteros é a *soma das distâncias aos lados*. Dado P interior ao triângulo, sendo d_a, d_b e d_c as suas distâncias aos lados BC, CA e AB, respectivamente, temos, por áreas,

$$\frac{BC \cdot d_a}{2} + \frac{CA \cdot d_b}{2} + \frac{AB \cdot d_c}{2} = \frac{AB \cdot h}{2} \iff d_a + d_b + d_c = h,$$

em que h é a altura de ABC.

Vamos supor, sem perda de generalidade, que cada triângulo menor tem altura 1. Com isso, sendo a_i, b_i, c_i as distâncias de cada ponto escolhido aos lados BC, CA e AB, respectivamente, $a_i+b_i+c_i = 10$.

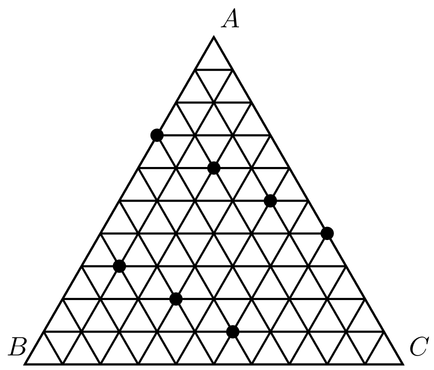
Agora, somando tudo para os n pontos temos

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) + (b_1 + b_2 + \cdots + b_n) + (c_1 + c_2 + \cdots + c_n) = 10n.$$

Mas cada parêntesis é pelo menos $0 + 1 + \cdots + (n-1) = n(n-1)/2$, logo

$$10n \geq 3 \cdot \frac{n(n-1)}{2} \iff n \leq 7.$$

A seguir, exibimos um exemplo para $n = 7$. A ideia é escolher de modo a distribuir as distâncias mínimas. Os vértices, por exemplo, não valem a pena pois uma das distâncias seria 10.



2.1 Problemas

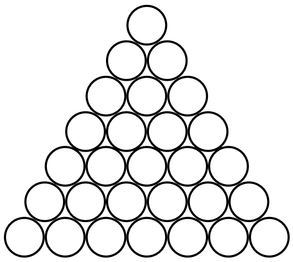
4. Em xadrez, cada movimento de um cavalo consiste em mover duas casas na horizontal e uma na vertical, ou duas casas na vertical e uma na horizontal, formando um L. Dado um tabuleiro $n \times n$, qual é a quantidade mínima de movimentos necessários para um cavalo ir de uma casa à casa oposta na diagonal?

5. Considere um tabuleiro de n linhas e 4 colunas.

Na primeira linha são escritos 4 zeros (um em cada casa). A seguir, cada linha é obtida a partir da linha anterior realizando a seguinte operação: uma das casas, a escolher, é mantida como na linha anterior; as outras três são trocadas: se na linha anterior havia um 0, coloca-se 1; se havia 1, coloca-se 2; e se havia 2, coloca-se 0.

Construa o maior tabuleiro possível com todas as suas linhas distintas e demonstre que é impossível construir um maior.

6. Seja $n = 3k + 1$, onde k é um inteiro, $k \geq 1$. Constrói-se um arranjo triangular de lado n formado por círculos de mesmo raio como o mostrado na figura para $n = 7$.



Determinar, para cada k, o maior número de círculos que podem ser coloridos de vermelho de tal modo que não existam dois círculos vermelhos tangentes entre si.

3 Casa dos pombos

Outra maneira de obter limitantes é usar casa dos pombos. Geralmente encontramos um exemplo que achamos ser o melhor e usamos casa dos pombos para mostrar que não dá para melhorar.

Exemplo 3. Qual é a maior quantidade de inteiros positivos menores ou iguais a 2016 que podemos escolher de modo que não haja dois números cuja diferença é 1, 2 ou 6?

Solução. Fazendo uns casos pequenos (trocando 2016 por n relativamente pequeno), vemos um exemplo que é

$$1, 4, 8, 11, \ldots$$

que são os números da forma $7k + 1$ ou $7k + 4$. De fato, a diferença entre dois números consecutivos é 3 ou 4 e a diferença entre dois números mais distantes é pelo menos 7. Com isso, temos um exemplo com $\frac{2}{7} \cdot 2016 = 576$ números.

Agora mostremos que não é possível escolhermos mais números. Suponha que escolhamos 577 ou mais números. Divida o conjunto dos números de 1 a 2016 em $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $\{8, 9, 10, 11, 12, 13, 14\}$ e assim por diante. Como $577 > 2 \cdot 2016/7$, pelo princípio da casa dos pombos três ou mais números foram escolhidos de um mesmo conjunto $\{a-3, a-2, a-1, a, a+1, a+2, a+3\}$. Mas a diferença entre dois números é pelo menos 3, logo a única maneira de escolher três números de um mesmo conjunto é $a - 3, a, a + 3$. Mas aí $(a + 3) - (a - 3) = 6$, absurdo.

Logo a maior quantidade procurada é 576.

3.1 Problemas

7. Determine o maior número de elementos que pode ter um conjunto B contido em $\{1, 2, \ldots, n\}$ com a seguinte propriedade:

   Para quaisquer a e b elementos de B, com a diferente de b, $a - b$ não divide $a + b$.

8. Algumas casas de um tabuleiro Q $(2n+1) \times (2n+1)$ são pintadas de preto, de modo que qualquer quadrado 2×2 de Q contenha, no máximo, 2 casas pretas. Achar o número máximo de casas pretas que o tabuleiro pode ter.

9. Considere o conjunto $A = \{1, 2, \dots, n\}$. Para cada inteiro k, seja r_k a maior quantidade de elementos distintos de A que podemos escolher de maneira que a diferença entre dois números escolhidos seja sempre diferente de k. Determine o maior valor possível de r_k, onde $1 \le k \le \frac{n}{2}$.

4 Ordenar

Quando temos n objetos do mesmo tipo, ordená-los pode ser útil tanto para encontrar um exemplo como para provar limitantes.

Exemplo 4. Calcule a quantidade máxima de regiões determinadas por n retas no plano.

Solução. Seja a_n essa quantidade. Começamos com uns casos pequenos (fica para você conferir!).

n	1	2	3	4
a_n	2	4	7	11

Agora, vamos ordenar as retas. A primeira reta determina duas regiões; a segunda, ao cortar a primeira, corta duas regiões, dando mais duas regiões; a terceira reta, se cortar as outras duas, determina mais três regiões, e assim por diante. A k-ésima reta, se cortar todas as outras $k-1$, e portanto, determina na k-ésima reta k novas fronteiras, determinando k novas regiões. Com isso, o total máximo de regiões é *pelo menos*

$$2 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n^2 + n + 2}{2}.$$

Vamos provar que esse é realmente o máximo, novamente ordenando as retas! Considere uma reta qualquer. Como ela corta no máximo $n-1$ outras retas, ela é fronteira de no máximo n pares de regiões. Com isso, $a_n \le a_{n-1} + n$ e podemos fazer uma indução: se $a_{n-1} \le 2 + 2 + 3 + \cdots + (n-1)$ então $a_n \le 2 + 2 + 3 + \cdots + (n-1) + n$.

Logo $a_n = \frac{n^2+n+2}{2}$.

Observação: uma maneira fácil de decorar essa fórmula (que aparece em outros problemas) é

$$a_n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2}.$$

Existe um motivo combinatório por trás dessa conta, que também é uma indução. Por exemplo, a quantidade máxima de regiões do espaço definidas por n planos é

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3}.$$

4.1 Problemas

10. Temos $3n$ retas ($n > 1$), entre as quais não há duas paralelas nem três concorrentes. Pintamos $2n$ retas de vermelho e n de azul, e contamos as regiões do plano com bordas totalmente vermelhas. Encontre o menor resultado possível dessa contagem, ao variarmos as posições das retas e as suas cores.

    Esclarecimento: para cada região, suas bordas estão contidas nas retas dadas; nenhuma das retas dadas corta o interior da região.

11. Marcam-se em uma reta 44 pontos, numerados $1, 2, 3, \dots, 44$ da esquerda para a direita. Vários grilos saltam na reta. Cada grilo parte do ponto 1, salta por pontos marcados e termina no ponto 44. Além disso, cada grilo sempre salta de um ponto marcado a outro marcado com um número maior.

    Quando todos os grilos terminaram de saltar, notou-se que para cada par i, j, com $1 \le i < j \le 44$, há um grilo que saltou diretamente do ponto i para o ponto j, sem pousar em nenhum dos pontos entre eles.

    Determine a menor quantidade de grilos para que isso seja possível.

5 Indução

Uma maneira natural de ordenar as coisas é com indução.

Exemplo 5. Seja $f(n)$, $n \in \mathbb{Z}_+^*$, o menor número de uns que podem ser usados para representar n usando uns e qualquer quantidade dos sinais $+$, $\times$, (,) (com o sentido usual).

Por exemplo,

$$80 = (1+1+1+1+1) \times (1+1+1+1) \times (1+1+1+1)$$

e, portanto, $f(8) \leq 13$.

Mostre que

$$3\log_3 n \leq f(n) < 5\log_3 n,$$

para todo $n > 1$.

Aqui, $\log_3 n$ é o expoente α tal que $3^\alpha = n$. Note que $\log_3 n$ não é necessariamente inteiro e que, por exemplo, $\log_3(ab) = \log_3 a + \log_3 b$.

(**Atenção**: nas expressões não podemos utilizar 11, 111, 111, etc; apenas 1.)

Solução. Primeiro vamos mostrar por indução que $f(n) < 5\log_3 n$. Para isso, é só construir exemplos. Se $n = 3k + r$, $r \in \{0, 1, 2\}$, $n \geq 7$, então $k \geq 2$ e podemos escrever $n = (1+1+1) \times k + r$, em que usamos r uns no final, e $f(n) \leq 3 + r + f(k) < 3 + 2 + 5\log_3 k = 5(1 + \log_3 k) = 5(\log_3 3 + \log_3 k) = 5\log_3(3k) \leq 5\log_3 n$. Para $2 \leq n \leq 6$, temos $f(2) = 2 < 5\log_3 2$ pois $2^5 > 3^2$, $f(3) = 3 < 5\log_3 3 = 5$, $f(4) \leq 4 < 5\log_3 4$ pois $4^5 > 3^4$, $f(5) \leq 5 < 5\log_3 5$ pois $\log_3 5 > 1$ e $f(6) \leq 5 < 5\log_3 6$ pelo mesmo motivo $(6 = (1+1+1) \times (1+1))$.

Agora, vamos provar, também por indução, que $f(n) \geq 3\log_3 n$. Como no exemplo anterior, usamos ordem. Ordene as operações (se várias ordens são possíveis, escolha qualquer uma) e considere a última operação.

- Se é $\times$, ou seja, $n = a \times b$, com $a, b > 1$ (não vale a pena algum deles ser 1) e $f(n) \geq f(a) + f(b) \geq 3\log_3 a + 3\log_3 b = 3\log_3(ab) = 3\log_3 n$.
- Se é $+$, ou seja, $n = a + b$, com $a, b > 1$, temos $ab - a - b = (a-1)(b-1) - 1 \geq 0 \implies ab \geq a + b$ e $f(n) \geq f(a) + f(b) \geq 3\log_3(ab) \geq 3\log_3(a+b) = 3\log_3 n$.
- Se é $+$ com $n = a + 1$, temos $f(n) \geq f(n-1) + 1 \geq 3\log_3(n-1) + 1 = 3\left(\log_3(n-1) + \frac{1}{3}\right) = 3\log_3(\sqrt[3]{3}(n-1)) \geq 3\log_3 n$ para $n \geq 5$. Para $n < 5$, verificamos manualmente que $f(n) = n$.

5.1 Problemas

12. Arnaldo e Bernardo jogam uma Super Batalha Naval. Cada um tem um tabuleiro $n \times n$. Arnaldo coloca barcos em seu tabuleiro (pelo menos um mas não se sabe quantos). Cada barco ocupa as n casas de uma linha ou de uma coluna e os barcos não podem se superpor nem ter um lado comum. Bernardo marca m casas (representando tiros) em seu tabuleiro. Depois que Bernardo marcou as m casas, Arnaldo diz quais dentre elas correspondem a posições ocupadas por barcos. Bernardo ganha se, a seguir, descobre quais são as posições de todos os barcos de Arnaldo. Determine o menor valor de m para o qual Bernardo pode garantir sua vitória.

13. Dada um família F de subconjuntos de $S = \{1, 2, \ldots, n\}$ $(n \geq 2)$, uma jogada permitida é escolher dois conjuntos *disjuntos* A e B de F e agregar $A \cup B$ a F, mantendo A e B em F.

    Inicialmente, F tem exatamente todos os subconjuntos unitários de S. O objetivo é obter, mediante jogadas permitidas, que F tenha todos os subconjuntos de $n-1$ elementos de S.

    Determine o menor número de jogadas necessárias para alcançar o objetivo.

    Observação: $A \cup B$ é o conjunto formado por todos os elementos que pertencem a A, a B, ou a ambos.

6 Problemas diversos

Aqui, você vai usar as ideias vistas, mas não necessariamente em ordem.

14. Deseja-se colorir cada número inteiro positivo de uma cor, utilizando a maior quantidade de cores possível de modo que se verifique a seguinte condição: se, em notação decimal, o número B pode ser obtido do número A, eliminando de A dois dígitos iguais e consecutivos (aa) ou eliminando de A quatro dígitos consecutivos que formem dois pares iguais e consecutivos ($abab$), então A e B são da mesma cor.

    Por exemplo, 8, 833 e 22811 devem ser da mesma cor; e, também, 72, 676772 e 1173329898 são da mesma cor.

    Determinar qual é a maior quantidade de cores que se pode utilizar.

15. Um triângulo equilátero branco é dividido em n^2 triângulos menores por retas paralelas aos lados do triângulo. Uma *linha de triângulos* é o conjunto de todos os triângulos compreendidos entre duas retas consecutivas. Em particular, um triângulo no canto é considerado uma linha de triângulos.

    Queremos pintar todos os triângulos de preto com uma sequência de operações como a seguir: escolher uma linha de triângulos com pelo menos um triângulo branco e pintar toda a linha de preto. Encontre as quantidades mínima e máxima de operações que podem ser feitas.

16. Seja m inteiro positivo. Considere um tabuleiro $4m \times 4m$. Duas casas do tabuleiro são *parentes* se estão na mesma linha ou na mesma coluna. Nenhuma casa é parente de si mesma. Algumas casas são pintadas de azul, de modo que cada casa é parente de pelo menos duas casas azuis. Determine a quantidade mínima de casas azuis.

17. Sejam k e n inteiros com $k \geq 2$ e $k \leq n \leq 2k-1$. Coloque em um tabuleiro $n \times n$ peças retangulares $1 \times k$ ou $k \times 1$ de modo que cada peça cubra exatamente k casinhas do tabuleiro, sem sobreposição. Faça isso até não ser possível colocar mais peças. Para cada k e n, determine a quantidade mínima de peças que as configurações finais desse procedimento podem ter.

18. Seja n um inteiro positivo. Temos n caixas, cada uma com uma quantidade inteira não negativa de pedras. Um movimento consiste em escolher uma das caixas, retirar duas pedras dela, jogar fora uma das pedras e colocar a outra pedra em qualquer outra caixa. Uma configuração inicial de caixas é dita *solúvel* se é possível chegar a uma situação sem caixas vazias após uma quantidade finita (possivelmente nula) de movimentos. Determine todas as configurações iniciais de pedras que não são solúveis, mas se tornam solúveis se adicionarmos uma pedra em qualquer uma das caixas.

19. A Terra Brasilis tem 15 cidades. Algumas delas são conectadas por voos, que são controlados por três companhias. Sabe-se que, mesmo se uma das companhias for interrompida, é possível ir de qualquer cidade a qualquer outra cidade, possivelmente com escalas, usando as outras duas companhias. Quantos voos essa cidade tem, no mínimo? Os voos de ida e volta são sempre controlados pela mesma companhia.