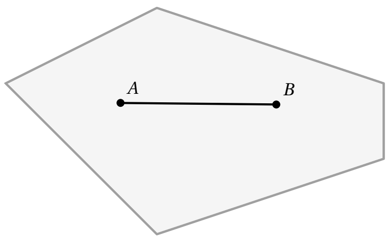
Prof. Cícero Thiago - cicerothmg@gmail.com

Propriedades geométricas e combinatórias dos polígonos convexos

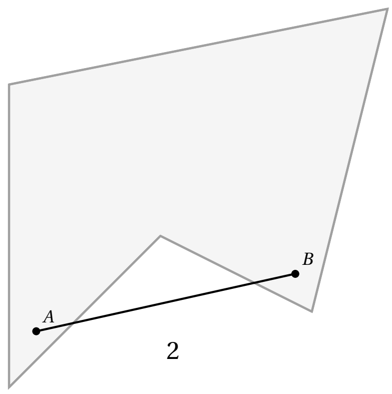
Definição 1. Dados os pontos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ pontos no plano, tais que quaisquer três deles não são colineares, chamaremos de polígono a reunião dos segmentos $A_1A_2, A_2A_3, \ldots, A_nA_1$. Segue abaixo uma nomenclatura para alguns polígonos de acordo com a sua quantidade de lados.

Nome	Número de lados
Triângulo	3
Quadrilátero	4
Pentágono	5
Hexágono	6
Heptágono	7
Octógono	8
Eneágono	9
Decágono	10
Dodecágono	12
Pentadecágono	15
Icoságono	20

Definição 2. Um polígono é dito *convexo* se todos os ângulos internos são menores que 180°. Caso contrário, o polígono será chamado de côncavo.



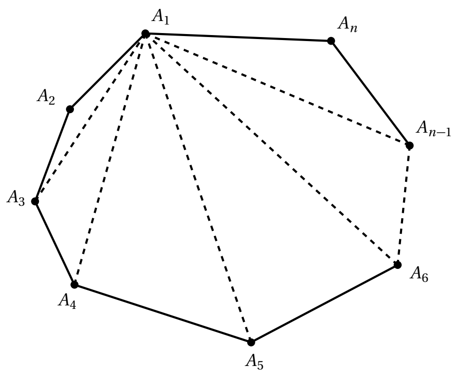
1



2

Teorema 1. O total de diagonais de um polígono convexo de n lados é $\dfrac{n(n-3)}{2}$.

Demonstração 1. É fácil ver que de cada vértice partem $n-3$ diagonais. Mas veja que a diagonal A_1A_3, por exemplo, foi contada no total de diagonais que partem de A_1 e no total de diagonais que partem de A_3. Dessa forma o total de diagonais será $\dfrac{n(n-3)}{2}$.

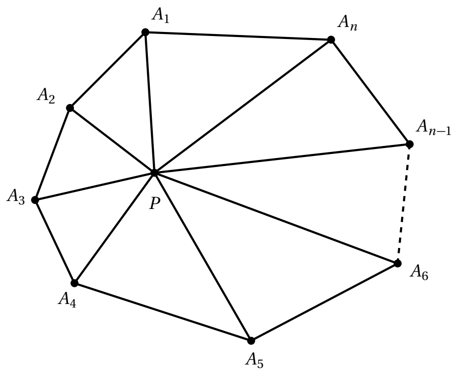


Teorema 2. A soma dos ângulos internos de um polígono convexo de n lados é $(n-2)\cdot 180°$.

Demonstração 2. Seja P um ponto no interior do polígono e seja S_i a soma dos ângulos internos do polígono $A_1A_2\ldots A_n$. A soma dos ângulos internos dos n triângulos PA_1A_2, PA_2A_3, ..., $PA_{n-1}A_n$ e PA_nA_1 é $n\cdot 180°$. Mas podemos calcular essa soma da seguinte forma

$$360° + S_i.$$

Portanto, $n\cdot 180° = 360° + S_i \Longleftrightarrow S_i = (n-2)\cdot 180°$.



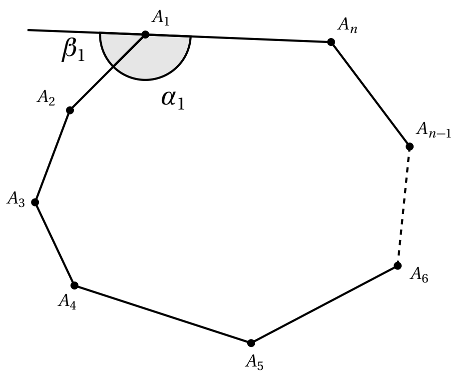
Teorema 3. A soma dos ângulos externos de um polígono convexo de n lados é 360°

Demonstração 3. É fácil ver que $\alpha_i + \beta_i = 180°$. Portanto,

$$\alpha_1 + \beta_1 + \alpha_2 + \beta_2 + \ldots + \alpha_n + \beta_n = n\cdot 180° \Longleftrightarrow$$

$$S_i + S_e = n\cdot 180° \Longleftrightarrow S_e = n\cdot 180° - (n-2)\cdot 180° \Longleftrightarrow$$

$$S_e = 360°.$$



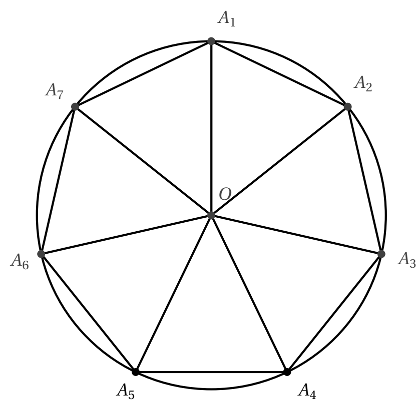
Definição 3. Um polígono é dito *regular* se todos os seus ângulos e todos os seus lados são iguais.

Teorema 4. Cada ângulo interno de um polígono regular mede $\dfrac{(n-2)\cdot 180°}{n}$.

Demonstração 4. É imediato conhecendo o resultado do teorema 2.

Teorema 5. Todo polígono regular está inscrito em um círculo.

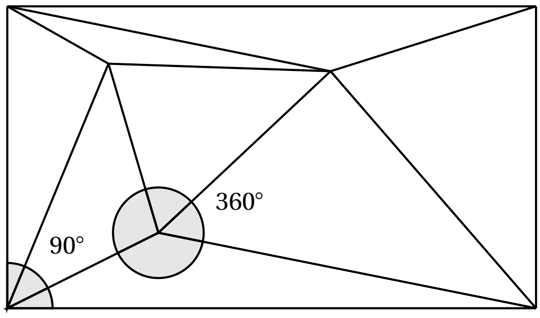
Demonstração 5. Seja $A_1A_2\dots A_n$ um polígono regular. Seja Γ a circunferência de centro O circunscrita ao triângulo $A_1A_2A_3$. Como $OA_2 = OA_3$ temos que OA_2A_3 é um triângulo isósceles e, com isso, $\angle OA_2A_3 = OA_3A_2$. Por outro lado $\angle A_1A_2A_3 = \angle A_2A_3A_4$ pois o polígono é regular. Dessa forma temos que $\angle A_1A_2O = \angle OA_3A_4$. Como $OA_2 = OA_3$, $\angle A_1A_2O = \angle OA_3A_4$ e $A_1A_2 = A_3A_4$ temos que $\Delta OA_1A_2 \equiv \Delta OA_4A_3$ pelo caso **LAL**. Portanto, $OA_4 = OA_1$ e, com isso, provamos que A_4 pertence a Γ. De maneira análoga prova - se que os outros vértices do polígono estão sobre Γ.



Teorema 6. Todo polígono regular possui um círculo inscrito.

Demonstração 6. Seja $A_1A_2\dots A_n$ um polígono regular. Seja Γ a circunferência de centro O circunscrita ao polígono. Sabemos que todos os triângulos OA_1A_2, $OA_2A_3\dots OA_nA_1$ são todos congruentes e, com isso, suas alturas relativas às bases são também congruentes. O círculo de centro O e raio igual a essas alturas é o círculo inscrito ao polígono.

Exemplo 1. (Colorado Mathematical Olympiad) Para a sua festa de aniversário de 100 anos George convidou 202 amigos. Eles lhe presentearam com um bolo de aniversário retangular com, é claro, 100 velas sobre ele tais que não existem três velas, ou duas velas e um canto do bolo, ou uma vela e dois cantos do bolo sobre uma mesma reta. George irá cortar o bolo em pedaços triangulares por cortes retos ligando velas umas com as outras ou com cantos do bolo de tal maneira que todas as velas serão usadas. Prove que existem pedaços suficientes para atender a todos os convidados com um pedaço de bolo, mas não sobrará nenhum pedaço para George.



Solução.
Admita que George conseguiu cortar o bolo em n triângulos de acordo com as condições do problema. Agora vamos calcular a soma S dos ângulos internos internos dos n triângulos da seguinte maneira: 360° ao redor de cada uma das 100 velas e 90° em cada um dos cantos do bolo. Portanto,

$$180^\circ \cdot n = 360^\circ \cdot 100 + 90^\circ \cdot 4 \Longleftrightarrow n = 202.$$

Portanto, todos os convidados ganham um pedaço e não sobra nada para George.

Exercícios propostos

1. Se $\alpha \leq \beta \leq \gamma$ os ângulos de um triângulo. Prove que $\gamma \geq 60^\circ$.

2. Em certo país existem 100 cidades. As distâncias entre cada par de cidades estão especificadas e todas são diferentes. Uma estrada conecta duas cidades A e B se, e somente se, B é a cidade mais próxima de A ou A é a cidade mais próxima de B. Prove que existem no máximo 5 estradas que saem de cada cidade. É possível que algumas das estradas formem um polígono?

3. (OBM) Prove que em qualquer pentágono convexo existem dois ângulos internos consecutivos cuja soma é maior ou igual a 216°.

4. (Estônia) Os ângulos de um n - ágono convexo são $\alpha, 2\alpha, \ldots, n\alpha$. Determine todos os valores possíveis de n e os valores correspondentes de α.

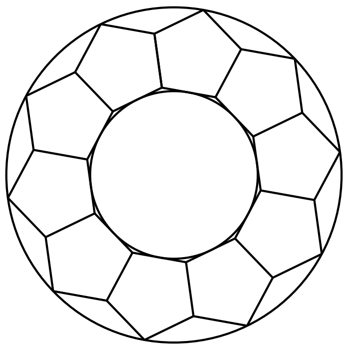
5. Seja P um ponto no interior de um polígono convexo de n lados e sejam $P_1, P_2, \ldots, P_n$ as projeções de P sobre as retas que contém os lados do polígono. Prove que pelo menos uma dessas projeções está no interior de um lado do polígono.

6. Sejam k pontos no interior de um quadrado de lado 1. Uma triangulação desse quadrado com vértices nesses k pontos e nos vértices do quadrado é tal que a área de cada triângulo é no máximo $\frac{1}{12}$. Prove que $k \geq 5$.

7. (Estônia) Um polígono regular de 2010 lados é dividido em triângulos. Determine o menor número possível de triângulos.

8. (Estônia) Um polígono convexo de n lados tem exatamente 3 ângulos internos obtusos. Determine os possíveis valores de n.

9. (Estônia) Na figura abaixo os 10 pentágonos são regulares. O círculo interno é tangente a exatamente um lado de cada pentágono e o círculo externo passa exatamente pelos vértices opostos a esses lados. Determine a área do círculo maior sabendo que a área do círculo menor é 1.



10. (OBM) Seja P um polígono convexo de perímetro p. Construímos uma curva fechada Y de área S de modo que qualquer ponto de Y seja exterior ao polígono e diste pelo menos k (k constante) de qualquer ponto do polígono. Prove que:

$$S \geq (p + k\pi)k.$$

11. (Cone Sul) Um polígono de área S está contido no interior de um quadrado de lado a. Demonstre que há pelo menos dois pontos do polígono que estão separados por uma distância maior ou igual a $\frac{S}{a}$.

12. (Austrália) São dados $n \geq 3$ pontos no plano tais que a área de um triângulo formado por quaisquer três deles é no máximo 1. Prove que os n pontos estão em um triângulo de área no máximo 4.

13. (a) Explique porque não existe um heptágono tal que todos os seus lados tenham a mesma medida e seus ângulos meçam exatamente, nesta ordem, $120°, 150°, 120°, 120°, 120°, 150°$ e $120°$.
(b) Justifique porque existe um heptágono tal que todos os seus lados tenham a mesma medida e seus ângulos meçam exatamente, nesta ordem, $108°, 168°, 108°, 132°, 108°, 168°$ e $108°$.

14. Maxi desenhou um pentágono em uma folha de papel e prolongou seus lados, obtendo 5 triângulos externos ao pentágono. Em seguida recortou os 5 triângulos e percebeu que esses 5 triângulos são iguais entre si. Prove que o pentágono de Maxi é regular.