

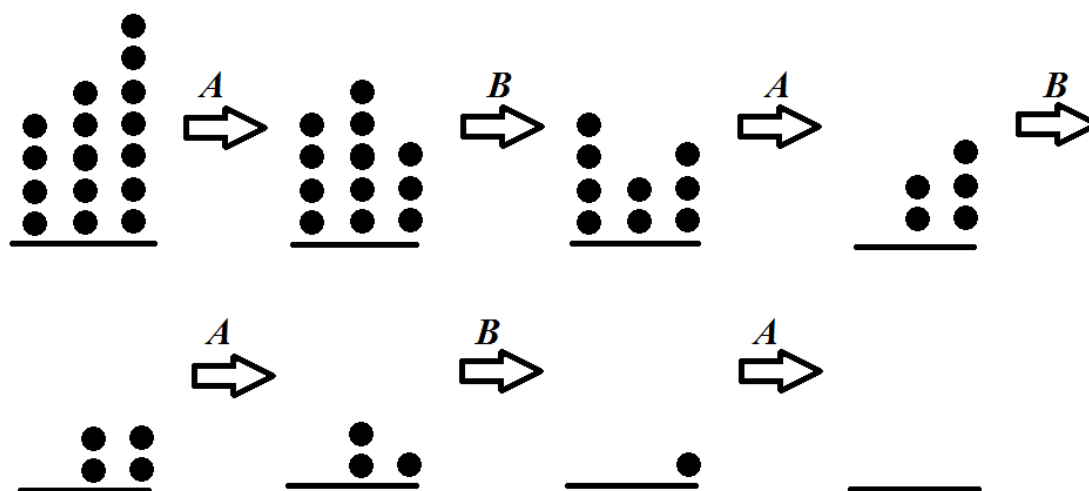
# Jogos: Cê Manja ou Nim?

Davi Lopes – Semana Olímpica 2017

## 1. Introdução

O jogo do Nim é um jogo bem simples e divertido, que foi criado muito antigamente. Existem inclusive relatos de que na China da Idade Média esse jogo já era jogado pelos soldados. Vejamos como é esse jogo.

Inicialmente, temos várias pilhas com várias pedras cada, e dois jogadores, jogam alternadamente. Cada jogador, em sua vez, pode escolher uma das pilhas e retirar de uma a todas as pedras dessa pilha. Quem não puder mais jogar perde. Por exemplo, suponhamos que tenhamos 3 pilhas de pedras e que dois jogadores A e B comecem a jogar o Nim (A começa e, após os movimentos abaixo, ganha o jogo):



Nesse artigo, aprenderemos uma nova operação entre números binários, veremos como essa operação nos ajuda a construir uma estratégia vencedora para o jogo do Nim e, o que será mais incrível, veremos como muitos jogos de dois jogadores em turnos podem se reduzir ao jogo do Nim.

## 2. Um Novo Modo de Somar: A Soma Nim

**Definição:** Dados dois números inteiros não negativos, representados na base 2:

$$a = (\overline{a_k a_{k-1} \dots a_2 a_1})_2$$

$$b = (\overline{b_k b_{k-1} \dots b_2 b_1})_2$$

Definimos a Soma Nim (também conhecida como soma do Menor Excluído ou soma XOR) como sendo a operação:

$$a \oplus b = c = (\overline{c_k c_{k-1} \dots c_2 c_1})_2, \text{ onde } c_i = \begin{cases} 0, & \text{se } a_i = b_i \\ 1, & \text{se } a_i \neq b_i \end{cases}, \forall i = 1, 2, \dots, k$$

**Exemplos:**  $11 \oplus 14 = (1011)_2 \oplus (1110)_2 = (0101)_2 = 5$ ;  $140 \oplus 25 = (10001100)_2 \oplus (00011001)_2 = (10010101)_2 = 149$ ;  $3 \oplus 0 = (11)_2 \oplus (00)_2 = (11)_2 = 3$ ; etc.

Abaixo apresentaremos as propriedades básicas da soma Nim. Apesar de a soma Nim ser bem diferente da soma usual (como mostram os exemplos), ela conserva muitos aspectos da soma usual.

**Propriedades Básicas da Soma Nim:** Sejam  $a, b, c$  números inteiros não negativos. Então, as propriedades abaixo são válidas:

**1ª – Comutativa:**  $a \oplus b = b \oplus a$ ;

**2ª – Associativa:**  $(a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c)$ ;

**3ª – Elemento Neutro:**  $a \oplus 0 = a$ ;

**4ª – Inverso Aditivo:**  $a \oplus a = 0$ ;

**5ª – Unicidade do Elemento Neutro:** Se  $a \oplus b = a$ , então  $b = 0$ ;

**6ª – Unicidade do Inverso Aditivo:** se  $a \oplus b = 0$ , então  $b = a$ .

**Demonstração:** Em todos os itens, estaremos supondo que  $a = (\overline{a_k a_{k-1} \dots a_2 a_1})_2$ ,  $b = (\overline{b_k b_{k-1} \dots b_2 b_1})_2$ ,  $c = (\overline{c_k c_{k-1} \dots c_2 c_1})_2$ .

1ª: Note que se:

$$a \oplus b = x = (\overline{x_k x_{k-1} \dots x_2 x_1})_2, \text{ onde } x_i = \begin{cases} 0, & \text{se } a_i = b_i \\ 1, & \text{se } a_i \neq b_i \end{cases}$$

$$b \oplus a = x' = (\overline{x'_k x'_{k-1} \dots x'_2 x'_1})_2, \text{ onde } x'_i = \begin{cases} 0, & \text{se } b_i = a_i \\ 1, & \text{se } b_i \neq a_i \end{cases}$$

Então  $x_i = x'_i$  claramente, donde  $a \oplus b = b \oplus a$ .

2ª: Suponha que:

$$a \oplus b = x = (\overline{x_k x_{k-1} \dots x_2 x_1})_2; \quad b \oplus c = x' = (\overline{x'_k x'_{k-1} \dots x'_2 x'_1})_2$$

$$(a \oplus b) \oplus c = y = (\overline{y_k y_{k-1} \dots y_2 y_1})_2; \quad a \oplus (b \oplus c) = y' = (\overline{y'_k y'_{k-1} \dots y'_2 y'_1})_2$$

Onde  $y_i = \begin{cases} 0, & \text{se } x_i = c_i \\ 1, & \text{se } x_i \neq c_i \end{cases}$  e  $y'_i = \begin{cases} 0, & \text{se } a_i = x'_i \\ 1, & \text{se } a_i \neq x'_i \end{cases}$ . A fim de demonstrarmos que  $y = y'$ , devemos mostrar que  $y_i = y'_i$  para todo  $i = 1, 2, \dots, k$ . Para tanto, montemos uma tabela com todas as possibilidades para  $(a_i, b_i, c_i)$ , o resultado de  $x_i$ , o de  $x'_i$ , o de  $y_i$  e o de  $y'_i$ .

$(a_i, b_i, c_i)$	$x_i = a_i \oplus b_i$	$x'_i = b_i \oplus c_i$	$y_i = x_i \oplus c_i$	$y'_i = a_i \oplus x'_i$
(0,0,0)	0	0	0	0
(0,0,1)	0	1	1	1
(0,1,0)	1	1	1	1
(0,1,1)	1	0	0	0
(1,0,0)	1	0	1	1
(1,0,1)	1	1	0	0
(1,1,0)	0	1	0	0
(1,1,1)	0	0	1	1

Portanto, analisando cada caso, concluímos que  $y_i = y'_i$ , donde  $y = y'$ , ou seja,  $(a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c)$ .

3ª: Note que  $a \oplus 0 = (x_k x_{k-1} \dots x_2 x_1)_2$ , onde  $x_i = 0$ , se  $a_i = 0$  ou  $x_i = 1$ , se  $a_i \neq 0$ . De qualquer modo,  $x_i = a_i$ , ou seja,  $a \oplus 0 = a$ .

4ª: Se  $a \oplus a \neq 0$ , então existe um dígito (na base 2)  $x_i$  de  $a \oplus a$  tal que  $x_i = 1$ . Isso significa que  $a_i \neq a_i$ , um absurdo. Portanto,  $a \oplus a = 0$ .

5ª: Se  $a \oplus b = a$ , então ao somarmos  $a$  em ambos os lados, obtemos  $a \oplus a \oplus b = a \oplus a \Rightarrow (a \oplus a) \oplus b = (a \oplus a) \Rightarrow 0 \oplus b = 0 \Rightarrow b = 0$ .

6ª: Se  $a \oplus b = 0$ , então somando  $a$  em ambos os lados, obtemos  $a \oplus a \oplus b = a \oplus 0 \Rightarrow (a \oplus a) \oplus b = (a \oplus 0) \Rightarrow 0 \oplus b = a \Rightarrow b = a$ . Note que usamos as propriedades de 1 a 4 para demonstrarmos as propriedades 5 e 6 ■

Ainda sobre a aritmética da soma Nim, provaremos dois lemas que nos serão de grande importância para resolver a questão sobre quem pode vencer no jogo do Nim.

**Lema 1:** Sejam  $n_1, n_2, \dots, n_k$  inteiros não negativos e sejam  $n'_1, n'_2, \dots, n'_k$  inteiros não negativos, tais que  $n_i = n'_i$  para todo  $i = 1, 2, \dots, k$ , exceto para  $i = j$ , onde  $n'_j < n_j$ . Se  $n_1 \oplus n_2 \oplus \dots \oplus n_k = 0$ , então  $n'_1 \oplus n'_2 \oplus \dots \oplus n'_k \neq 0$ .

**Demonstração:** Suponha que possamos ter  $n'_1 \oplus n'_2 \oplus \dots \oplus n'_k = 0$ . Então:

$$(n_1 \oplus n_2 \oplus \dots \oplus n_k) \oplus (n'_1 \oplus n'_2 \oplus \dots \oplus n'_k) = 0 \oplus 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow (n_1 \oplus n'_1) \oplus (n_2 \oplus n'_2) \oplus \dots \oplus (n_k \oplus n'_k) = 0$$

Como  $n_i = n'_i$  para todo  $i = 1, 2, \dots, k$ , exceto para  $i = j$ , então temos que  $n_i \oplus n'_i = 0$ , para todo  $i = 1, 2, \dots, k$ , exceto para  $i = j$ . Dessa forma:

$$0 \oplus 0 \oplus \dots \oplus (n_j \oplus n'_j) \oplus \dots \oplus 0 = 0 \Rightarrow n_j \oplus n'_j = 0 \Rightarrow n_j = n'_j$$

O que é um absurdo. Logo, o lema 1 está demonstrado ■

**Lema 2:** Sejam  $n_1, n_2, \dots, n_k$  inteiros não negativos, satisfazendo a soma  $n_1 \oplus n_2 \oplus \dots \oplus n_k \neq 0$ . Então, existem  $n'_1, n'_2, \dots, n'_k$  inteiros não negativos, tais que  $n_i = n'_i$

para todo  $i = 1, 2, \dots, k$ , exceto para  $i = j$ , onde  $n'_j < n_j$ , e que satisfazem  $n'_1 \oplus n'_2 \oplus \dots \oplus n'_k = 0$ .

**Demonstração:** Seja  $s = n_1 \oplus n_2 \oplus \dots \oplus n_t$ . Como  $s \neq 0$ , então existe ao menos um algarismo 1 em  $s$  (na base 2). Seja  $d$  a posição do 1 de  $s$  mais à esquerda. Então, existe um número  $n_j$  tal que  $n_j$  possui 1 na posição  $d$  (pois caso contrário, só teríamos 0 em cada  $n_i$  na posição  $d$ . Logo, ao efetuarmos a soma Nim, o algarismo da posição  $d$  seria 0, que é um absurdo). Em outras palavras, podemos escrever:

$$s = \left( \overbrace{00 \dots 0}^{t \text{ zeros}} 1s_{k-1} \dots s_2s_1 \right)_2 ; n_j = (x_{t+k}x_{t+k-1} \dots x_{k+1}1x_{k-1} \dots x_2x_1)_2$$

Agora, considere  $n'_j = s \oplus n_j$ . Note que  $n'_j < n_j$ , pois:

$$n_j = (x_{t+k}x_{t+k-1} \dots x_{k+1}0x'_{k-1} \dots x'_2x'_1)_2 < (x_{t+k}x_{t+k-1} \dots x_{k+1}1x_{k-1} \dots x_2x_1)_2 = n_j$$

Além disso, se definirmos os  $n'_i$ 's como no enunciado do lema, teremos:

$$\begin{aligned} n'_1 \oplus n'_2 \oplus \dots \oplus n'_k &= n_1 \oplus n_2 \oplus \dots \oplus n'_j \oplus \dots \oplus n_k = \\ &= n_1 \oplus n_2 \oplus \dots \oplus (s \oplus n_j) \oplus \dots \oplus n_k = (n_1 \oplus \dots \oplus n_k) \oplus s = s \oplus s = 0 \end{aligned}$$

E esses números satisfazem às condições do lema 2 ■

### 3. A Estratégia Vencedora do Jogo do Nim

E aí? Como faremos agora para decidir quem tem a estratégia vencedora do Nim, e como é essa estratégia vencedora?

Primeiro, considere que um jogo de Nim com  $k$  pilhas pode ser representado como uma  $k$ -upla de inteiros não negativos, e que cada movimento do jogo do Nim representa a escolha de um dos  $k$  números da  $k$ -upla, e a conseqüente troca por um inteiro não-negativo menor. Por exemplo, o jogo ilustrado no começo pode ser representado pelas triplas:

$$(4,5,7) \rightarrow (4,5,3) \rightarrow (4,2,3) \rightarrow (0,2,3) \rightarrow (0,2,2) \rightarrow (0,2,1) \rightarrow (0,0,1) \rightarrow (0,0,0)$$

Percebeu a semelhança do jogo com as operações que são feitas nos lemas 1 e 2? Elas são idênticas! De acordo com os lemas e passando para o jogo do Nim, que tem soma Nim das quantidades de pedras diferente de zero pode entregar uma soma Nim das quantidades de pedras igual a zero para o adversário, mas ele não pode fazer o mesmo. Ou seja, quem está com a soma Nim 0 sai desfavorecido, uma vez que é possível que ele sempre fique com soma Nim 0 (basta que o outro jogador siga as instruções do lema 2) e como quem não pode mais jogar perde (a posição em que o jogo termina é a  $k$ -upla  $(0, 0, \dots, 0)$ ), então concluímos o seguinte:

*“Num jogo do Nim, o primeiro jogador tem a estratégia vencedora se a soma Nim das quantidades de pedras em cada pilha for diferente de zero. Caso a soma seja zero, o segundo jogador possui a estratégia vencedora.”*

Podemos observar em dois exemplos práticos como isso funciona, tanto no jogo como nas somas Nim. Note que as somas Nim ficam alternando entre zero e não-zero quando usamos a estratégia vencedora nos dois casos:

$$(3,5,2) \rightarrow (3,1,2) \rightarrow (2,1,2) \rightarrow (2,0,2) \rightarrow (0,0,2) \rightarrow (0,0,0)$$

$$3 \oplus 5 \oplus 2 = 4 \rightarrow 3 \oplus 1 \oplus 2 = 0 \rightarrow 2 \oplus 1 \oplus 2 = 1 \rightarrow 2 \oplus 0 \oplus 2 = 0 \rightarrow \\ \rightarrow 0 \oplus 0 \oplus 2 = 2 \rightarrow 0 \oplus 0 \oplus 0 = 0$$

$$(3,5,6) \rightarrow (1,5,6) \rightarrow (1,5,4) \rightarrow (1,2,4) \rightarrow (1,2,1) \rightarrow (1,0,1) \rightarrow (1,0,0) \rightarrow (0,0,0)$$

$$3 \oplus 5 \oplus 6 = 0 \rightarrow 1 \oplus 5 \oplus 6 = 2 \rightarrow 1 \oplus 5 \oplus 4 = 0 \rightarrow 1 \oplus 2 \oplus 1 = 2 \rightarrow \\ \rightarrow 1 \oplus 0 \oplus 1 = 0 \rightarrow 1 \oplus 0 \oplus 0 = 1 \rightarrow 0 \oplus 0 \oplus 0 = 0$$

Legal! Agora já sei como ganhar no jogo do Nim, e assim vou desafiar meus amigos, ganhar um dinheirão nas apostas, quebrar os cassinos... Calma aí apostador! O que a gente viu não serve apenas para jogarmos um jogo do Nim isolado. Veremos como vários jogos podem ser jogados simultaneamente, e como podemos reduzir essa jogatina simultânea em um jogo de Nim.

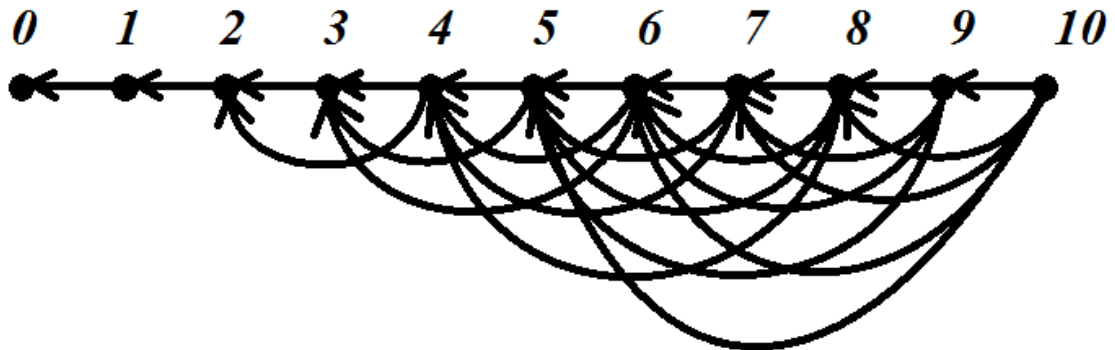
## **4. Dos Jogos para os Grafos – A Função de Sprague – Grundy**

### **4.1. Transformando Jogos em Grafos**

Dado um jogo qualquer, podemos associar a ele um grafo  $G(V, A)$ , onde:

- $V$ , o conjunto de vértices, representa todas as possíveis posições em que um jogo pode estar;
- $A$ , o conjunto das arestas, é uma função que dá, para cada  $v \in V$ , o subconjunto de todas as posições do jogo que podem ser obtidas a partir de  $v$ . Chamaremos todo elemento  $a \in A(v)$  de seguidor de  $v$  (No desenho do grafo, teremos arestas direcionadas do tipo  $v \rightarrow a$ ).
- Se  $A(v)$  é vazio, dizemos que  $v$  é um vértice terminal.
- O vértice  $v_0 \in V$  representa a posição inicial. Então, o primeiro jogador se move a partir de  $v_0$ .
- Os jogadores jogam alternadamente, sendo que um jogador que está num vértice  $v$  só pode ir para um vértice em  $A(v)$ .
- Quem alcançar um vértice terminal perde.

Por exemplo, o clássico jogo onde temos algumas pedras numa pilha, e cada jogador pode tirar de 1 até metade das pedras da pilha, possui o grafo abaixo para um número inicial de pedras igual a 10 (aqui, cada vértice será representado pelo número de pedras de sua posição correspondente).



Bem complicadinho, não? Por isso, ao invés de usarmos um desenho, muitas vezes é melhor representarmos o grafo através das funções de arestas:

$$A(0) = \emptyset; A(1) = \{0\}; A(2) = \{1\}; A(3) = \{2\}; A(4) = \{2,3\}; A(5) = \{3,4\};$$

$$A(6) = \{3,4,5\}; A(7) = \{4,5,6\}; A(8) = \{4,5,6,7\};$$

$$A(9) = \{5,6,7,8\}; A(10) = \{5,6,7,8,9\}$$

A partir de agora, vamos considerar apenas jogos que satisfazem às seguintes propriedades:

1. O jogo possui dois jogadores apenas;
2. O conjunto de posições disponível no jogo é finito;
3. O jogo é imparcial, ou seja, o conjunto de movimentos possíveis só depende da posição em si, e não dos jogadores. Por exemplo, o jogo do Nim é imparcial, mas o jogo de Xadrez e de Damas não, haja vista que cada jogador, em sua vez, não pode mexer nas peças do oponente;
4. Os jogadores jogam alternadamente em turnos;
5. Quem não puder mais jogar perde;
6. O jogo eventualmente termina, ou seja, ele não é infinito.

Dessa forma, o grafo de um jogo desses é um grafo finito, pois o número de posições é finito, de arestas que nunca formam um ciclo, pois caso contrário, existiriam movimentos que fariam com que o jogo nunca acabasse bastando percorrer o ciclo infinitamente, e que existe ao menos um vértice terminal, para que quem não pudesse mais jogar perdesse. O primeiro jogador deve começar um passeio a partir do vértice inicial  $v_0$ , se movendo para algum seguidor de  $v_0$ . A cada passo, de modo alternado, um jogador, que está em um vértice  $v$ , deve escolher um vértice seguidor de  $v$  para continuar o passeio, e ele pode escolher o seguidor que quiser, pois o jogo é imparcial.

Veja alguns exemplos de passeio no grafo do exemplo anterior ( $v_0 = 10$ ):

$$10 \rightarrow 9 \rightarrow 8 \rightarrow 7 \rightarrow 6 \rightarrow 5 \rightarrow 4 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow 0$$

$$10 \rightarrow 7 \rightarrow 6 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow 0$$

$$10 \rightarrow 5 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow 0$$

$$10 \rightarrow 5 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow 0$$

Note que nos dois primeiros casos, o primeiro jogador perde; nos dois casos seguintes, o segundo jogador perde. Além disso, os dois últimos casos mostram que o primeiro jogador tem a estratégia vencedora: basta que ele vá para o vértice 5 e depois para o vértice 2, o que é sempre possível.

#### 4.2. A Função de Sprague – Grundy: Vencendo Jogos em Grafos

Seja  $G(V, A)$  um grafo finito, sem ciclos e com ao menos um vértice terminal. Definimos a função de Sprague – Grundy do grafo  $G$  como sendo uma função  $g: V \rightarrow \mathbb{N}_0$  do conjunto dos vértices de  $G$  para os inteiros não negativos da seguinte forma:

- $g(v) = 0$ , para todo vértice terminal  $v$ ;
- $g(v) = \min\{n \geq 0 \mid n \neq g(y), y \in A(v)\}$ ;

Perceba que essa função é definida recursivamente, de modo que, aos vértices que possuem apenas vértices terminais como seguidores, atribuímos o valor 1, por exemplo. No grafo do jogo das 10 pedras que vimos antes, temos:

$$g(0) = 0; g(1) = 1; g(2) = 0; g(3) = 1; g(4) = 2; g(5) = 0;$$

$$g(6) = 3; g(7) = 1; g(8) = 4; g(9) = 2; g(10) = 5;$$

Observe ainda que, dado um jogo do Nim de uma pilha só, se representarmos cada vértice de seu grafo pelo número de pedras de sua posição, então  $g(n) = n$ , para todo inteiro não negativo  $n$ .

A função de Sprague – Grundy possui duas grandes utilidades: a primeira delas é dizer, a partir do valor atribuído ao vértice inicial, qual dos dois jogadores possui a estratégia vencedora.

**Teorema:** Seja  $G$  um grafo de um jogo, e  $v_0$  seu vértice inicial. Se  $g(v_0) \neq 0$ , então o primeiro jogador possui a estratégia vencedora. Se  $g(v_0) = 0$ , então o segundo jogador possui a estratégia vencedora.

**Demonstração:** O resultado acima será consequência das observações abaixo:

1. Se um jogador está em um vértice  $v$ , e  $g(v) = 0$ , então ele só poderá ir para vértices  $v'$  tais que  $g(v') \neq 0$ , ou então  $v$  é um vértice terminal.

De fato, se  $v$  é um vértice terminal,  $g(v) = 0$  por definição e a observação é óbvia. Caso  $v$  não seja vértice terminal, o jogador só pode se mover para um vértice em  $A(v)$ . Note que para todo  $v' \in A(v)$ , temos  $g(v') \neq 0$ , pois se existisse  $v' \in A(v)$  com  $g(v') = 0$ , então, da definição de  $g$ , teríamos  $g(v) > 0$ , um absurdo. Logo, a primeira observação é verdadeira.

2. Se um jogador está em um vértice  $v$ , e  $g(v) \neq 0$ , então ele pode escolher um vértice  $v' \in A(v)$  com  $g(v') = 0$ .

Isso é verdade, pois como  $g(v) \neq 0$ , então, da definição de  $g$ , existe um vértice  $v' \in A(v)$  tal que  $g(v') = 0$  (caso  $v'$  não existisse, teríamos que 0 é o menor valor de  $g$  que não é atribuído a nenhum vértice de  $A(v)$ , donde  $g(v) = 0$ , um absurdo). Esse é o vértice procurado.

Com essas observações, perceba que, caso  $g(v_0) \neq 0$ , o primeiro jogador pode sempre ganhar: para tanto, basta que, a cada movimento, o primeiro jogador vá para um vértice com valor em  $g$  igual a zero, o que é possível pela observação 2, entregando essa posição ao segundo jogador. Isso sempre ocorrerá, pois, uma vez que o segundo jogador está em um vértice cujo valor em  $g$  é zero, o primeiro jogador estará em seguida em um vértice cujo valor em  $g$  não é zero, pela observação 1. A mesma ideia vale para o caso  $g(v_0) = 0$ , só que os jogadores terão papéis invertidos.

Em outras palavras, todo vértice  $v$  com  $g(v) \neq 0$  é uma posição vencedora, e todo vértice  $v$  com  $g(v) = 0$  é uma posição perdedora ■

Interessante... No entanto, se quiséssemos saber só quem tinha a estratégia vencedora, poderíamos ter visto se cada vértice era uma posição vencedora ou não, ao invés de atribuímos uma função que pode assumir vários valores. De fato, para analisar quem possui estratégia vencedora em um jogo só é mais vantajoso olharmos as posições vencedoras e perdedoras do que analisar a função de Sprague – Grundy do grafo correspondente.

Mas quem disse que estamos querendo analisar um jogo só?

### **4.3. Somando Jogos**

Suponha que dois jogadores estejam jogando um jogo, composto de vários jogos menores, onde os jogadores jogam alternadamente, e cada jogador, em sua vez, escolhe um dos jogos menores e realiza um movimento neste jogo menor. Quem não puder mais jogar perde. Como decidiremos quem possui estratégia vencedora?



Antes de tudo, devemos nos perguntar como é o grafo desse jogo que é a “soma” de jogos menores. Para tanto, note que se  $G_1(V_1, A_1)$ ,  $G_2(V_2, A_2)$ , ...,  $G_n(V_n, A_n)$  são os grafos correspondentes de cada jogo individual, o grafo  $G(V, A)$  do jogo que é a composição dos  $n$  jogos menores é caracterizado assim:

- $V = V_1 \times V_2 \times \dots \times V_n$  é o produto cartesiano de  $V_1, V_2, \dots, V_n$ . Isso significa que  $V = \{(v_1, v_2, \dots, v_n) | v_i \in V_i, \forall i = 1, 2, \dots, n\}$ .
- $A(v_1, v_2, \dots, v_n) = \{(v_1, v_2, \dots, v'_k, \dots, v_n) | v'_k \in A_k(v_k)\}$ . Isso significa que um vértice  $v' \in G$  é seguidor de  $v \in G$  se, e somente se, exatamente uma das coordenadas de  $v'$  é seguidora de sua coordenada correspondente em  $v$ , e todas as outras coordenadas de  $v'$  são iguais às coordenadas correspondentes em  $v$ .

Observe que o grafo definido acima de fato é o grafo de uma composição de vários jogos, uma vez que cada posição é uma análise coletiva das posições individuais (por isso definimos  $V = V_1 \times V_2 \times \dots \times V_n$ ), e que devemos ligar duas posições se através de um movimento é possível ir de uma à outra (por isso que a função  $A$  é a função identidade em todas as coordenadas com exceção de uma, já que a cada movimento o jogador só pode escolher um jogo para se movimentar).

Um exemplo de um jogo que é a soma de vários jogos menores é o jogo do Nim com várias pilhas, sendo que cada pilha é um jogo menor.

Por simplicidade, vamos denotar  $G = G_1 + G_2 + \dots + G_n$  como sendo o grafo  $G$  da composição dos jogos  $G_1, G_2, \dots, G_n$ . O próximo teorema nos dirá como é a função de Sprague – Grundy de  $G$  em função das funções dos grafos menores. Essa é a segunda aplicação da função e é ela que nos mostrará o quão poderosa essa função é.

**Teorema de Sprague – Grundy:** Sejam  $G_1, G_2, \dots, G_n$  grafos de jogos, com funções de Sprague – Grundy  $g_1, g_2, \dots, g_n$ , respectivamente. Se  $G = G_1 + G_2 + \dots + G_n$  tem função de Sprague – Grundy  $g$ , então, para todo vértice  $(v_1, v_2, \dots, v_n)$  de  $G$ :

$$g(v_1, v_2, \dots, v_n) = g_1(v_1) \oplus g_2(v_2) \oplus \dots \oplus g_n(v_n)$$

**Demonstração:** Dado o grafo  $G(V, A)$ , para cada vértice  $v \in V$ , seja  $d(v)$  o maior número de arestas que um caminho de  $v$  até um vértice terminal pode ter. Note que essa função está bem definida, pois o jogo é finito, sem ciclos e eventualmente termina. Para todo  $k \geq 0$  inteiro, defina  $I_k = \{v \in G | d(v) = k\}$  (por exemplo,  $I_0$  é o conjunto de todos os vértices terminais e  $I_1$  é o conjunto de todos os vértices cujos seguidores são todos vértices terminais).

Para provar o teorema, provaremos por indução forte em  $k$  que todo vértice  $(v_1, v_2, \dots, v_n) \in I_k$  satisfaz  $g(v_1, v_2, \dots, v_n) = g_1(v_1) \oplus g_2(v_2) \oplus \dots \oplus g_n(v_n)$ . Como o grafo é finito, existirá  $a$  suficientemente grande tal que  $I_0 \cup I_1 \cup \dots \cup I_a = V$ , e então o teorema valerá para todo vértice de  $G$ .

O caso inicial ( $k = 0$ ) é fácil: de fato, se  $(v_1, v_2, \dots, v_n) \in I_0$ , então  $(v_1, v_2, \dots, v_n)$  é um vértice terminal em  $G$ , donde  $g(v_1, v_2, \dots, v_n) = 0$ . Também, pela definição da composição de grafos, temos que  $v_1$  é vértice terminal em  $G_1$ ,  $v_2$  é vértice terminal em  $G_2$ , e assim por diante. Assim,  $g_1(v_1) = g_2(v_2) = \dots = g_n(v_n) = 0$ , e daí  $0 = g_1(v_1) \oplus g_2(v_2) \oplus \dots \oplus g_n(v_n) = g(v_1, v_2, \dots, v_n)$ , provando o caso inicial.

Agora, suponha que para todo  $t \leq k$ ,  $(v_1, v_2, \dots, v_n) \in I_t$  implica  $g(v_1, v_2, \dots, v_n) = g_1(v_1) \oplus g_2(v_2) \oplus \dots \oplus g_n(v_n)$ . Precisamos provar que  $(v_1, v_2, \dots, v_n) \in I_{k+1}$  implica  $g(v_1, v_2, \dots, v_n) = g_1(v_1) \oplus g_2(v_2) \oplus \dots \oplus g_n(v_n)$  para completar nossa indução.

Seja  $v = (v_1, v_2, \dots, v_n) \in I_{k+1}$ . Se  $v'$  é um seguidor qualquer de  $v$ , então  $v' \in I_t$ , para algum  $t \leq k$ , pois caso  $v' \in I_t$  e  $t \geq k + 1$ , então existe um caminho de  $v$  até um vértice terminal de comprimento  $(t + 1)$ : basta sairmos de  $v$  até  $v'$  e percorrer o caminho de  $t$  arestas indo de  $v'$  até um vértice terminal. No entanto,  $t + 1 \geq k + 2 \Rightarrow v \notin I_{k+1}$ , um absurdo. Logo, por hipótese de indução, todo seguidor  $v' = (v'_1, v'_2, \dots, v'_n)$  de  $v$  satisfaz  $g(v'_1, v'_2, \dots, v'_n) = g_1(v'_1) \oplus g_2(v'_2) \oplus \dots \oplus g_n(v'_n)$ .

Definindo  $b = g_1(v_1) \oplus g_2(v_2) \oplus \dots \oplus g_n(v_n)$ , para provarmos que  $g(v) = b$ , devemos provar duas afirmações:

- Não existe  $v' \in A(v)$  com  $g(v') = b$ ;
- Para todo  $0 \leq a < b$ , existe  $v' \in A(v)$  com  $g(v') = a$ ;

Para provar a primeira afirmação, suponha o contrário. Daí, existe  $v' = (v'_1, v'_2, \dots, v'_n)$  em  $A(v)$  tal que  $g(v') = b$ . Como  $v'$  é seguidor de  $v$  no grafo  $G$ , então exatamente uma das coordenadas de  $v'$  é diferente da de  $v$ . Suponhamos sem perda de generalidade que tenhamos  $v' = (v'_1, v_2, v_3, \dots, v_n)$ , com  $v'_1 \neq v_1$  e  $v_1$  sendo seguidor de  $v_1$  no grafo  $G_1$ .

Por hipótese de indução,  $g(v') = g(v'_1, v_2, \dots, v_n) = g_1(v'_1) \oplus g_2(v_2) \oplus \dots \oplus g_n(v_n) = b = g_1(v_1) \oplus g_2(v_2) \oplus \dots \oplus g_n(v_n)$ . Cancelando os termos comuns, temos  $g_1(v'_1) = g_1(v_1)$ , o que é um absurdo, pela definição da função  $g_1$  e pelo fato de que  $v_1$  é seguidor de  $v_1$  em  $G_1$ . Logo, a primeira afirmação está provada.

Para provar a segunda afirmação, seja  $c = a \oplus b$ . Como  $a \neq b$ , temos  $c \neq 0$ , e com isso,  $c$  possui  $k$  algarismos na base binária ( $k \in \mathbb{N}$ ), sendo que o algarismo de  $c$  na posição  $k$  é igual a 1 (O algarismo na posição  $k$  é o algarismo mais à esquerda de  $c$ ). Como  $c = a \oplus b$  e o primeiro algarismo binário de  $c$  está na posição  $k$ , então  $b$  possui algarismo binário 1 na posição  $k$  e  $a$  possui algarismo binário 0 na posição  $k$ , haja vista que  $a < b$ .

Sendo  $b = g_1(v_1) \oplus g_2(v_2) \oplus \dots \oplus g_n(v_n)$ , o fato de que o algarismo binário de posição  $k$  em  $b$  ser igual a 1 implica que o algarismo binário de posição  $k$  de algum  $g_i(v_i)$  é igual a 1 também. Suponha sem perda de generalidade que seja  $g_1(v_1)$ . Daí,

temos  $c \oplus g_1(v_1) < g_1(v_1)$ , pois os algarismos binários de  $g_1(v_1)$  de ordem superior a  $k$  são mantidos, e o algarismo de ordem  $k$  de  $g_1(v_1)$ , que é 1, vira 0 com a soma Nim, fazendo assim com que  $c \oplus g_1(v_1)$  seja menor do que  $g_1(v_1)$ . Dessa forma, pela definição da função de Sprague – Grundy, existe  $v'_1$  seguidor de  $v_1$  em  $G_1$  satisfazendo  $g_1(v'_1) = c \oplus g_1(v_1)$ .

Agora, note que  $(v'_1, v_2, \dots, v_n)$  é um seguidor de  $(v_1, v_2, \dots, v_n)$  em  $G$ . Logo, por hipótese de indução, temos que:

$$\begin{aligned} g(v'_1, v_2, \dots, v_n) &= g_1(v'_1) \oplus g_2(v_2) \oplus \dots \oplus g_n(v_n) = \\ &= c \oplus g_1(v_1) \oplus g_2(v_2) \oplus \dots \oplus g_n(v_n) = c \oplus b = a \oplus b \oplus b = a \end{aligned}$$

Isso prova a segunda parte. Logo, o resultado segue por indução, e a demonstração do teorema está completa ■

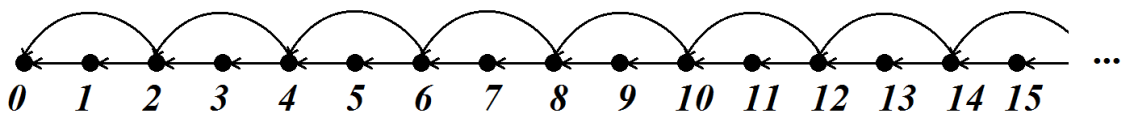
As consequências desse teorema são incríveis, pois, para saber se o primeiro jogador ou o segundo possui a estratégia vencedora num jogo que é a soma de vários jogos, basta efetuarmos a soma Nim das funções correspondentes a cada jogo individualmente. Logo, provamos que todo jogo finito, de dois jogadores jogando em turnos, imparcial, sem ciclos, que eventualmente termina, e que só tem vitória ou derrota como resultado pode ser reduzido a um jogo do Nim.

## 5. Aplicações em Problemas

O problema abaixo foi o problema 6 da Olimpíada de Matemática Rioplatense de 2012 (Nível 2), e ele possui uma solução mágica se aplicarmos o que aprendemos.

**Exemplo 1:** Dados vários inteiros não negativos, uma operação permitida é trocar um inteiro positivo  $a$  escolhido entre eles da seguinte maneira. Se  $a$  é ímpar, trocamos  $a$  por  $a - 1$ ; se  $a$  é par, trocamos  $a$  por  $a - 1$  ou por  $a - 2$ . Dois jogadores  $A$  e  $B$  realizam operações em turnos, começando com os números  $1, 2, \dots, n$ ;  $A$  joga primeiro. Um jogador ganha se ao final de uma operação sua se obtém uma sucessão de  $n$  zeros. Para cada  $n$ , determinar quem tem estratégia vencedora.

**Solução:** Primeiro, imaginemos um jogo onde, dado um inteiro positivo  $k$ , é possível subtrair 1, se  $k$  for ímpar, e subtrair 1 ou 2, se  $k$  for par. Logo, vamos analisar o grafo desse jogo:



Agora, construindo a função de Sprague-Grundy, obtemos:

$g(0)$	$g(1)$	$g(2)$	$g(3)$	$g(4)$	$g(5)$	$g(6)$	$g(7)$	$g(8)$	$g(9)$	$g(10)$	$g(11)$	$g(12)$
0	1	2	0	1	0	2	0	1	0	2	0	1

Observe que a função  $g$  é uma função periódica, pois o grafo é periódico. Daí, temos  $g(4k + 3) = g(4k + 5) = 0$ ,  $g(4k + 4) = 1$  e  $g(4k + 6) = 2$ , para todo  $k \geq 0$  inteiro.

Voltando ao problema, temos que o joga em questão nada mais é do que uma soma de jogos do tipo que descrevemos, cujos números iniciais são  $1, 2, \dots, n$ . Então, para sabermos quem tem estratégia vencedora, precisamos saber, para cada  $n$ , o valor de  $g(1) \oplus g(2) \dots \oplus g(n)$ . A tabela abaixo mostra valores de  $g(1) \oplus \dots \oplus g(n)$  para  $n$  de 1 até 16.

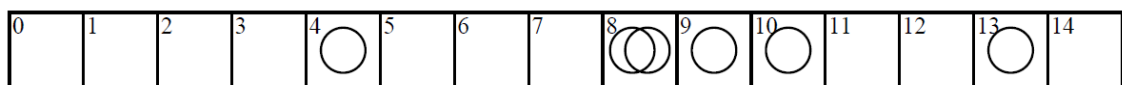
$n$	1	2	3	4	5	6	7	8
Soma	1	3	3	2	2	0	0	1
$n$	9	10	11	12	13	14	15	16
Soma	1	3	3	2	2	0	0	1

Percebeu que a função soma é periódica? Não é difícil provar rigorosamente isso, e deixamos essa tarefa como um exercício para o leitor (coitado do leitor, sempre sobra pra ele...). Dessa forma, o primeiro jogador tem uma estratégia vencedora se  $n$  não for da forma  $8k + 6$ , e nem da forma  $8k + 7$ . Nesses dois casos, o segundo jogador possui a estratégia vencedora ■

Alguns jogos são particularmente interessantes, pois é possível traçar um paralelo com o jogo do Nim. O exemplo abaixo mostra isso.

**Exemplo 2 (Jogo do Nimble):** É dado um jogo onde algumas moedas estão em um tabuleiro  $1 \times n$ , sendo que algumas moedas podem estar numa mesma casa, e dois jogadores realizam movimentos em turnos. Um movimento consiste em escolher uma das moedas e movê-la para a esquerda (essa moeda pode ficar em uma casa onde já tem outra(s) moeda(s)). Quem não puder mais jogar perde. Determine, em função das posições das moedas no tabuleiro, quem ter a estratégia vencedora.

**Solução:** Numere as casas da esquerda para a direita como  $0, 1, 2, \dots$ . Note que podemos fazer uma analogia entre esse jogo e o jogo do Nim, se pensarmos da seguinte maneira: cada uma das moedas representa uma pilha do jogo de Nim, e a quantidade da pilha correspondente a cada moeda é o número da casa onde ela está.



Por exemplo, a figura acima pode ser vista como um jogo de Nim com pilhas de tamanho 4, 8, 8, 9, 10 e 13. Agora fica bem tranquilo saber quem tem estratégia vencedora, né? ■

## 6. Exercícios e Problemas

### Exercícios pra Fazer Aquecimento

01. (a) Qual é a soma Nim entre 27 e 17?

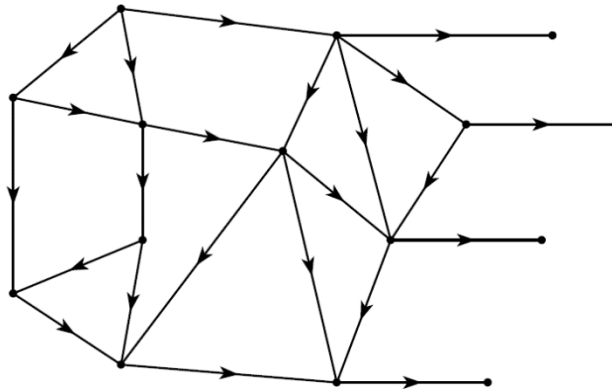
(b) A soma Nim de 38 e  $x$  é 25. Qual o valor de  $x$ ?

02. Determine o movimento vencedor (ou seja, aquele movimento que permite ao jogador de estratégia vencedora prosseguir jogando com certeza de vitória) nos seguintes jogos de Nim:

(a) com três pilhas de 12, 19 e 27 pedras;

(b) com quatro pilhas de 13, 17, 19 e 23 pedras.

03. Encontre a função de Sprague-Grundy do grafo abaixo:



04. O jogo da subtração é um jogo onde se tem uma determinada quantidade de pedras numa pilha, e cada um dos dois jogadores, em turnos, podem retirar uma certa quantidade de pedras, e essa quantidade pertence a um conjunto  $S \subset \mathbb{N}$ . Quem não puder mais jogar, perde.

(a) Determine a função de Sprague-Grundy desse jogo quando  $S = \{1, 2, 3, 4\}$  (ou seja, quando se pode retirar de 1 a 4 moedas da pilha por vez).

(b) Determine a função de Sprague-Grundy desse jogo quando  $S = \{1, 2, \dots, k\}$ , sendo  $k$  um número natural fixo.

05. Uma variante do jogo da subtração é o jogo onde cada jogador pode retirar no mínimo 1 pedra e no máximo a metade das pedras que estão na pilha. Determine a função de Sprague-Grundy para esse jogo.

06. Considere um jogo no qual é dado três pilhas de 15, 20 e 25 pedras. Dois jogadores, em turnos, podem realizar a seguinte operação: escolher uma pilha, e retirar de 1 a 3

pedras dela. Quem não puder mais jogar perde. Determine quem possui estratégia vencedora.

07. Considere um jogo no qual é dado três pilhas, de 2016, 2017 e 2018 pedras. Dois jogadores, em turnos, podem realizar uma das seguintes operações:

- Escolher uma pilha e retirar qualquer quantidade par de pedrinhas dela;
- Escolher uma pilha com um número ímpar de pedras e remover essa pilha.

Quem não puder mais jogar perde. Determine quem possui estratégia vencedora.

### ***Probleminhas Mais Interessantes***

08. (Jogo do Poker Nim) Esse jogo tem as mesmas regras do Nim usual, mas com uma operação a mais permitida: é permitido adicionar pedras a uma pilha qualquer. Explique como esse jogo é equivalente ao Nim usual.

09. Considere um jogo de dois jogadores (que jogam em turnos) onde temos uma pilha, e um movimento consiste em escolher um valor de  $c$  que seja divisor próprio da quantidade de pilhas naquele momento, e remover  $c$  pedras da pilha. Por exemplo, numa pedra com 5 pilhas, o primeiro jogador pode apenas retirar 1 pedra, deixando 4; o segundo jogador pode retirar 1 ou 2 pedras, já que 1 e 2 são divisores próprios de 4. Determine a função de Sprague-Grundy desse jogo.

10. (O Jogo de Wythoff) Mais uma vez, dois jogadores em turnos movem uma rainha num tabuleiro de xadrez. Em cada operação é permitido movê-la para qualquer casa que esteja abaixo, à esquerda ou na diagonal inferior esquerda da casa de onde a rainha estava antes de fazer a operação. Quem não puder mais jogar perde. Determine, em função da casa inicial da rainha, a função de Sprague-Grundy. E se fosse no  $n \times n$ ?

11. (O Jogo do Pega e Quebra) Mais uma vez, dois jogadores em turnos jogam o seguinte jogo, que é uma versão generalizada do Nim: é dado inicialmente algumas pilhas de pedras, e a cada turno é permitido escolher uma pilha e fazer uma das duas operações: retirar algumas pedras dessa pilha (como no Nim) ou então dividir a pilha em duas pilhas menores. Quem não puder mais jogar perde.

Se  $g(n)$  representa a função de Sprague-Grundy no jogo onde inicialmente se tem uma pilha com  $n$  pedras, determine  $g(n)$  em função de  $n$ .

### **Problemas Pesadões**

12. (O Problema do Nim Misere) Esse jogo possui as mesmas regras do Nim usual, mas com uma única diferença: quem não puder mais jogar, GANHA! Determine, em função da configuração inicial, quem possui estratégia vencedora.

13. (O Jogo de Northcott) É dado um tabuleiro e peças brancas e pretas, sendo que cada linha tem exatamente uma peça branca e uma peça preta. O jogador  $A$  move apenas peças brancas, e o  $B$  move apenas peças pretas. Cada um deles, em sua vez, escolhe uma peça da cor que pode mover, e move essa peça para a esquerda ou para a direita, sem passar por cima da peça de outra cor. Mostre como isso é equivalente ao jogo do Nim.

14. (Vira-Moedas) São dadas  $n$  moedas em fila, algumas delas mostrando cara e outras, coroa. Uma operação permitida é escolher uma moeda que está mostrando cara e virá-la. Se quiser, nessa mesma jogada o jogador pode escolher outra moeda à esquerda da primeira escolhida e virar essa moeda. Quem não puder mais jogar, perde. Mostre como esse jogo é equivalente ao do Nim.

15. (Nimble 2D) Considere um tabuleiro que, da esquerda para a direita, e de cima para baixo, tem começo mas não tem fim. Algumas moedas são colocadas nas casas do tabuleiro, sendo que algumas moedas podem estar numa mesma casa, e dois jogadores realizam movimentos em turnos. Um movimento consiste em escolher uma das moedas e movê-la para a esquerda ou para baixo, quantas casas quiser (essa moeda pode ficar em uma casa onde já tem outra(s) moeda(s)). Quem não puder mais jogar perde. Determine, em função das posições das moedas no tabuleiro, quem ter a estratégia vencedora

16. (Nim em Escadas) Considere uma escada de  $n$  degraus, numeradas de 1 a  $n$ , e algumas pedras nesses degraus. Um movimento consiste em escolher algumas pedras de um degrau, e movê-las para o degrau imediatamente abaixo dele (quando uma pedra chega no degrau 0, ela desaparece). Quem não puder mais jogar, perde.

Se  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  representa a quantidade de pedras em cada escada (onde  $x_i$  é o número de pedras no degrau  $i$ ), demonstre que  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  é uma posição perdedora se, e somente se,  $x_1 \oplus x_3 \oplus x_5 \oplus \dots = 0$ .

17. (Teorema de Moore) Uma generalização do jogo de Nim é o que chamamos de  $\text{Nim}_k$ , que consiste no seguinte: é dada  $n$  pilhas com  $x_1, x_2, \dots, x_n$  pedras, e cada movimento consiste em escolher exatamente  $k$  pilhas e retirar algumas pedras de cada uma delas. Quem não puder mais jogar perde e o jogo é de dois jogadores em turnos. Observe que para  $k = 1$ , temos o próprio jogo do Nim usual.

Mostre que  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  é uma posição perdedora se, e somente se, ao colocarmos os números  $x_1, \dots, x_n$  na base 2, e colocarmos esses  $n$  números em linha (como se estivéssemos somando, mas sem realizar a operação), a quantidade de 1's em cada coluna é divisível por  $(k + 1)$ .