

Tabuleiro: o rei das cartas!

Diego Eloi

30 de janeiro de 2017

Problema 1 Em um tabuleiro, Davi e Luís, jogam um por vez, colocando peças de dominó 2×1 que cobre exatamente dois quadrados do tabuleiro. Perde o jogador, que, na sua vez, não puder colocar mais uma peça de dominó. Davi é quem começa o jogo. Para cada uma dos seguintes tabuleiros, dizer qual o jogador pode garantir a vitória e explicar como jogar.

- a) Um tabuleiro de três linhas por três colunas.
- b) Um tabuleiro de três linhas por 4 colunas.

Problema 2 Para cada casinha de um tabuleiro quadrado, definimos se duas casinhas são amigas se:

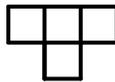
- a) Se a casinha é da borda do tabuleiro, suas casinhas amigas são ela própria e as casinhas vizinhas.
- b) Se a casinha não é da borda do tabuleiro, suas casinhas amigas são apenas as suas vizinhas.

Em um tabuleiro 2011×2011 há um número inteiro escrito em cada casinha. A operação permitida é seleccionar uma casinha no tabuleiro e em cada casinha amiga da escolhida adicionar 1 ou subtrair 1 do número escrito nela. As casinhas que não são amigas permanecem inalteradas. Se no início o tabuleiro tem 0 em cada casinha, pode, por sucessivas operações permitidas, obter um tabuleiro com um 1 em cada casinha? Obs: duas casinhas são consideradas vizinhas se elas compartilham um lado ou um vértice em comum.

Problema 3

Problema 4

Problema 5 Podemos cobrir um tabuleiro 10×10 utilizando T-tetraminós como na figura abaixo?



Problema 6 Pode um cavalo mover-se do canto inferior esquerdo de um tabuleiro de xadrez até o canto superior direito passando por todas as outras casas do tabuleiro exatamente uma vez?

Problema 7 Em cada quadradinho de um tabuleiro 15×15 é escrito um número dentre $1, 2, 3, \dots, 15$. Quadradinhos simétricos com relação à diagonal principal contém números iguais e nenhuma linha ou coluna possui dois números iguais. Mostre que todos os números da diagonal principal são diferentes.

Problema 8 De quantas maneiras podemos colocar uma torre branca e uma torre preta em um tabuleiro de xadrez de modo que elas não se ataquem?

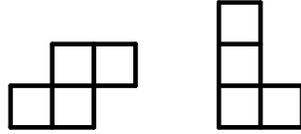
Problema 9 Qual o maior número de quadrados de um tabuleiro 8×8 que pode ser colorido de verde de modo que, em qualquer arranjo de três quadrados em L (como no exemplo), pelo menos um quadradinho não está pintado de verde?

Problema 10 Qual o maior número de reis que podem ser colocados em um tabuleiro de xadrez de modo que nenhum par deles esteja em cheque?

Problema 11 Um tabuleiro 10×10 é preenchido com inteiros (um cada casinha) de modo que a diferença entre números colocados em casinhas vizinhas não é maior que 5. Prove que dois dos inteiros tem de ser iguais. **Observação:** duas casinhas são ditas serem vizinhas se possuem um lado em comum.

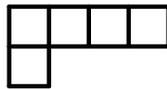
Problema 12 Os números de 1 a 100 são colocados nos quadradinhos de um tabuleiro 10×10 de modo aleatório. Prove que existem 2 quadradinhos vizinhos cuja diferença é maior ou igual a 6. Vizinhos são quadradinhos que possuem 1 lado em comum.

Problema 13 Mostre que é possível cobrirmos um tabuleiro 6×6 usando as peças:



Nota: Pode-se usar qualquer quantidade de cada. Você pode rodar e virar as peças à vontade.

Problema 14 (OBM/98) Encontre o menor tabuleiro quadrado que pode ser coberto (sem buracos nem superposições) usando peças do seguinte formato:



Problema 15 (Teste Rioplatense) Ache o menor lado de um tabuleiro quadrado que pode ser montado usando um mesmo número de peças de cada um dos tipos abaixo, sabendo que o lado de cada um dos quadradinhos das peças mede 1.



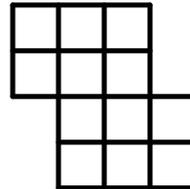
Problema 16 Em um tabuleiro, Davi e Luís, jogam um por vez, colocando peças de dominó 2×1 que cobre exatamente dois quadrados do tabuleiro. Perde o jogador, que, na sua vez, não puder colocar mais uma peça de dominó. Davi é quem começa o jogo. Para cada uma dos seguintes tabuleiros, dizer qual o jogador pode garantir a vitória e explicar como jogar.

- Um tabuleiro de três linhas por três colunas.
- Um tabuleiro de três linhas por 4 colunas.

Problema 17 Disponha-se de uma quantidade suficiente de peças dos seguintes tipos.



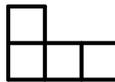
TIPO I



TIPO 2

Queremos construir um retângulo com peças dos tipos I e II, utilizando pelo menos uma peça do tipo II, sem sobrepor as peças e sem deixar buracos entre elas. Caso a resposta seja possível, mostre um retângulo, e em caso não, justifique. **Nota:** As peças podem girar e/ou dar a volta.

Problema 18 Prove que um retângulo 4×11 não pode ser coberto com peças do tipo:



Problema 19 É possível que um cavalo do xadrez passe por todas as casas de um tabuleiro 4×10 exatamente uma vez e, em seguida retorne para o quadrado original?