Malandramente...

NU – Professor Matheus Secco

Problema 1 (Putnam 2001) Encontre todos os pares de números reais (x, y) tais que:

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{2y} = (x^2 + 3y^2)(3x^2 + y^2) \\ \frac{1}{x} - \frac{1}{2y} = 2(y^4 - x^4). \end{cases}$$

Problema 2 (Ibero-U 2011) Seja $n \geqslant 2$ um inteiro. Considere $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0$ um polinômio com n raízes inteiras distintas duas a duas e diferentes de 1. Prove que

$$\frac{n + \sum_{j=0}^{n-1} ja_j}{1 + \sum_{j=0}^{n-1} a_j} < 1 + \ln n.$$

Problema 3 (Ibero-U 2011) Os números complexos a, b e c são tais que $a|bc|+b|ca|+c|ab| = 0$. Demonstre que $|(a-b)(b-c)(c-a)| \geqslant 3\sqrt{3}|abc|$.

Problema 4 (IMC 2011) Determine o valor de

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1 + \frac{1}{n}) \ln(1 + \frac{1}{2n}) \ln(1 + \frac{1}{2n+1}).$$

Problema 5 (IMC 2010) Defina a sequência $x_1, x_2, \ldots$ por $x_1 = \sqrt{5}$ e $x_{n+1} = x_n^2 - 2$ para cada $n \geqslant 1$. Calcule

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_1x_2\ldots x_n}{x_{n+1}}$$

Problema 6 (Putnam 2014) Sejam $a_0 = \frac{5}{2}$ e $a_k = a_{k-1}^2 - 2$ para $k \geqslant 1$. Calcule

$$\prod_{k=0}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{a_k}\right).$$

Problema 7 (OBM-U 2003) Defina $a_1 = 3, a_{n+1} = a_n^2 - 2$. Prove que $\lim_{n\to\infty} \frac{\ln \ln a_n}{n} = \ln 2$ e calcule $\lim_{n\to\infty}(\ln \ln a_n - n \ln 2)$.

Problema 8 (Ibero-U 2006) Um n-ágono regular está inscrito em uma circunferência de raio 1. Sejam $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ as distâncias de um vértice aos outros vértices do polígono. Demonstre que

$$(5 - a_1^2)(5 - a_2^2)\ldots(5 - a_{n-1}^2) = F_n^2$$

Problema 9 (Bielorrússia 99) Duas sequências de números reais $x_1, x_2, \ldots$ e $y_1, y_2, \ldots$ são definidas da seguinte maneira:

$$x_1 = y_1 = \sqrt{3}, x_{n+1} = x_n + \sqrt{1 + x_n^2}$$

e

$$y_{n+1} = \frac{y_n}{1 + \sqrt{1 + y_n^2}}$$

para todo $n \geqslant 1$. Prove que $2 < x_n y_n < 3$ para todo $n > 1 >$

Problema 10 (IMC 2001) Seja $a_0 = 2$ e defina as sequências a_n e b_n por $a_{n+1} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - a_n^2}}$ e $b_{n+1} = \frac{2b_n}{2+\sqrt{4+b_n^2}}$.

a) Prove que as duas sequências são decrescentes e convergem a 0.

b) Prove que a sequência $2^n a_n$ é crescente, enquanto que a sequência $2^n b_n$ é decrescente, mas ambas convergem para o mesmo limite.

Problema 11 (Putnam 06) Seja n um inteiro positivo ímpar e seja θ um número real tal que $\frac{\theta}{\pi}$ é irracional. Seja $a_k = \tan\left(\theta + \frac{k\pi}{n}\right), k = 1, 2, \ldots, n$. Prove que

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{a_1 a_2 \cdots a_n}$$

é um inteiro e determine seu valor.

Problema 12 (IMC 2012) Seja $n \geqslant 2$ um inteiro. Encontre todos os reais a tais que existem reais $x_1, \ldots, x_n$ tais que

$$x_1(1 - x_2) = x_2(1 - x_3) = \ldots = x_{n-1}(1 - x_n) = x_n(1 - x_1) = a.$$

Problema 13 Sejam $a_1, a_2, \ldots, a_n$ números reais. Prove que

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{a_i a_j}{i + j} \geqslant 0.$$

Problema 14 (China 1996) Sejam $n \in \mathbb{N}$, $x_0 = 0$, $x_i > 0 (i = 1, 2, \ldots, n)$, $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$. Prove que

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{\sqrt{1 + x_0 + x_1 + \ldots + x_{i-1}}\sqrt{x_i + \ldots + x_n}} < \frac{\pi}{2}.$$

Problema 15 (OBM-U 2009) Considere a sequência $a_0, a_1, a_2, \ldots$ definida por $a_0 = 0, a_1 = \frac{\pi}{3}$ e, para $n \geqslant 1$,

$$a_{n+1} = \frac{\pi(a_0 a_n + a_1 a_{n-1} + a_2 a_{n-2} + \ldots + a_n a_0)}{3(n+1)}.$$

Calcule

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{2^k}.$$

Problema 16 (IMC 2003) Seja $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência definida por $a_0 = 1$ e

$$a_{n+1} = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{n - k + 2}.$$

Encontre o limite

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{2^k}.$$