Semana Olímpica 2017
Contagens Elementares
Nível 1

Samuel Feitosa

1 O princípio multiplicativo

Exercício 1. Existem 5 diferentes tipos de sorvetes e 3 diferentes tipos de vasilhas em uma sorveteria. De quantos modos podemos escolher um sorvete e uma vasilha?

Exercício 2. Na sorveteira do problema anterior existem 4 tipos diferentes de coberturas. De quantas maneiras podemos escolher uma vasilha, um sorvete e uma cobertura?

Exercício 3. Existem 3 cidades A , B e C em Bruzundanga. Existem 6 estradas entre A e B, 4 estradas entre B e C. De quantos modos podemos ir de A até C?

Exercício 4. Uma nova cidade D e novas estradas foram construídas em Bruzundanga. Três estradas entre A e D, duas entre D e C. De quantos modos podemos ir de A até C?

Exercício 5. Se na sorveteria tivéssemos dinheiro apenas para comprar duas opções dentre sorvete, vasilha, cobertura. De quantos modos isso pode ser feito?

Exercício 6. Nós chamamos um número natural de "bonito"se todos os seus dígitos são ímpares. Quantos números bonitos de quatro dígitos existem?

Exercício 7. Jogamos uma moeda três vezes. Quantas sequências diferentes de caras e coroas podemos obter?

Exercício 8. Cada quadrado de um tabuleiro 2×2 pode ser pintada de preto ou branco. Quantas colorações diferentes podemos ter?

Exercício 9. De quantas maneiras podemos preencher um cartão da loteira esportiva? Na loteira esportiva você tem que adivinhar o resultado de 13 jogos, indicando ou uma vitoria para um dos times ou um empate.

Exercício 10. No alfabeto de Bruzundanga, existem apenas três letras, A, B e C. Uma palavra é uma sequência de arbitrária de não mais que 4 letras. Quantas palavras existem no alfabeto de bruzundanga?

Exercício 11. Um capitão e um vice-capitão tem que ser escolhidos de um time com 11 jogadores. De quantos modos podemos fazer isto?

Exercício 12. De quantas maneiras podemos costurar uma bandeira de três cores com três tiras horizontais de igual tamanho se nós temos seis tiras de cores diferentes.

Exercício 13. Quantos números naturais de 4 algarismos (na base 10), que sejam menores que 5000 e divisíveis por 5, podem ser formados usando-se apenas os algarismos $2, 3, 4$ e 5?

Exercício 14. Quantos números naturais pares na que se escrevem (na base 10) com três algarismos distintos?

Exercício 15. De quantas maneiras podemos colocar uma torre branca e outra petra em um tabuleiro de xadrez de modo que elas não se ataquem?

Exercício 16. De quantas maneiras podemos colocar um rei branco e outro preto em um tabuleiro de xadrez de modo que eles não se ataquem?

Exercício 17. Quantos números de seis dígitos tem pelo menos um dígito par?

Exercício 18. Existem apenas 6 letras no alfabeto de Cracolandia. Uma palavra é qualquer sequencia de seis letras em que duas delas são iguais. Quantas palavras tem o alfabeto de Cracolandia?

2 Permutações

2.1 Permutações Simples

Vamos agora estudar o problema de quantas formas podemos arranjar n objetos em uma linha. Tal arranjo é chamado permutação. Antes de estudá-los vamos ver o conceito de *fatorial*. Se n é um número natural, então $n!$ (Lê-se *n fatorial*) é o produto: $1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n$. Então $2! = 2$, $3! = 6$, $4! = 24$ ... Para conveniência nos cálculos, definimos $0! = 1$.

Exercício 19. Simplifique as expressões:

a) $10! \cdot 11$ b) $n! \cdot (n+1)$ c) $12!/10!2!$

Calcule:

a)$100!/98!$ b) $n!/(n-1)!$ c) $2 \cdot (n-1)! + (n-2)!$

Exercício 20. Calcule

a) $1.1! + 2.2! + 3.3! + \ldots + n.n!$, onde $n \in \mathbb{N}$

b) $\dfrac{1}{(1+1)!} + \dfrac{2}{(2+1)!} + \ldots + \dfrac{n}{(n+1)!}$, onde $n \in \mathbb{N}$.

Exercício 21. Quantos números de três digitos podem ser escritos usando os dígitos 1,2 e 3 (sem repetição) em alguma ordem?

Exercício 22. De quantos modos podemos colocar 4 bolas de cores diferentes em uma linha?

Exercício 23. Em um país existem 20 cidades e todo par de cidades é ligado por uma estrada. Quantas estradas existem?

Exercício 24. Quantas diagonais existem em um polígono de n lados convexo?

Exercício 25. Seja S o conjunto de números naturais cujos dígitos são escolhidos no conjunto $\{1,3,5,7\}$ sem dígitos repetidos. Encontre:

(i) $\#S$

(ii) $\sum_{n\in S} n$.

Exercício 26. Existem 12 estudantes em uma festa. Cinco deles são garotas. De quantas maneiras esses 12 estudantes podem ser arranjados em uma fila se

i) Não exitem restrições?

ii) As 5 garotas devem ficar juntas(formando um bloco)?

iii) Duas garotas não podem ser adjacentes?

iv) Entre dois garotos específicos A e B, existem exatamente 3 garotas e nenhum garoto?

Exercício 27. Considere m garotos e n garotas arranjados em uma fila, onde $m,n \in \mathbb{N}$. Encontre o número de maneiras de fazermos esses arranjos de modo que

i) Não existem restrições

ii) Não existem garotos adjacentes ($m \leq n+1$).

iii) As n garotas formam um um único bloco.

iv) Um garoto particular e uma garota particular têm que ser adjacentes.

Exercício 28. (Espanha 1985) Prove que para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$(n+1)(n+2)\dots(2n)$$

é divisível por 2^n.

Exercício 29. Encontre o número de divisores positivos comuns de 10^{40} e 20^{30}

Exercício 30. Mostre que para qualquer $n \in \mathbb{N}$ o número de divisores positivos de n^2 é sempre ímpar.

Exercício 31. Mostre que o número de divisores positivos de $\underbrace{111\dots1}_{1992 vezes}$ é par.

2.2 Permutações Circulares

Exercício 32. Um colar é um fio circular com pedrinhas que podem deslizar sobre o fio. É permitido rodar o colar , mas não virá-lo. Quantos diferentes colares podem ser feitos usanod 13 diferentes pedrinhas?

Exercício 33. Se no problema anterior fosse permitido virar o colar. Qual seria a resposta?

Exercício 34. Encontre o número de maneiras de sentarmos n casais de namorados ao redor de uma mesa circular em cada um dos seguintes casos:

(i) Homens e mulheres estão sentados de modo alternado

(ii) Todo homem está do lado de sua namorada.

Exercício 35. De quantos modos podemos sentar 5 garotos e 3 garotas ao redor de uma mesa circular se

(i) não existem restrições?

(ii) O garoto B_1 não pode sentar ao lado da garota G_1?

(iii) Duas garotas não podem sentar adjacentes?

3 Exercícios

Exercício 36. De quantas maneiras podemos colocar 8 torres em um tabuleiro de xadrez de modo que quaisquer duas não se ataquem?

Exercício 37. Quantas palavras podem ser escritas usando exatamente cinco letras A e não mais que três letras B(sem usar nenhuma outra letra diferente de A e B)?

Exercício 38. De quantas maneiras podemos dividir 14 pessoas em 7 pares?

Exercício 39. Quantos números de 9 dígitos tem a soma de seus dígitos sendo par?

Exercício 40. Quantos são os gabaritos possíveis de um teste de 10 questões de múltipla-escolha, com cinco alternativas por questão?

Exercício 41. Quantos inteiros há entre 1000 e 9999 cujos algarismos são distintos?

Exercício 42. Quantos divisores naturais possui o número 360?

Exercício 43. Quantos são os números de 4 dígitos que possuem pelo menos dois dígitos iguais?

Exercício 44. Quantos subconjuntos possui um conjunto que tem n elementos?

Exercício 45. De quantos modos podemos arrumar 8 torres iguais em um tabuleiro de xadrez(8×8) de modo que não haja duas torres na mesma linha nem na mesma coluna?

Exercício 46. Em uma banca há 5 exemplares iguais da revista A, 6 exemplares iguais da revista B e 10 exemplares iguais da revista C. Quantas coleções não vazias de revistas dessa banca é possível formar?

Exercício 47. De um baralho comum (52 cartas) sacam-se sucessivamente e sem reposição três cartas. Quantas são as extrações ns quais a primeira carta é de copas, a segunda é um rei e a terceira não é dama?

Exercício 48. Um vagão de metrô tem 10 bancos individuais, sendo 5 de frenbte e 5 de costas. De 10 passageiros, 4 preferem sentar de frente, 3 preferem sentar de costas e os demais não têm preferência. De quantos modos os passageiros podem se sentar, respeitando-se as preferências?

Exercício 49. Escrevem-se os inteiros de 1 até 222222. Quantas vezes o algarismo zero é escrito?

Exercício 50. Quantos são os números de 5 algarismos, na base 10:

1) nos quais o algarismo 2 figura?

2) nos quais o algarismo 2 não figura?

Exercício 51. Em um concurso há três candidatos e cinco examinadores, devendo cada examinador votar em um candidato. De quantos modos os votos podem ser distribuidos?

Exercício 52. O código morse usa "palavras"contendo de 1 a 4 "letras", as "letras"sendo ponto e traço. Quantas "palavras"existem no código morse?

Exercício 53. Fichas podem ser azuis, vermelhas ou amarelas; circulares, retangulares ou triangulares; finas ou grossas. Quantos tipos de fichas existem?

Exercício 54. Escrevem-se números de cinco dígitos(inclusive os começados por zero) em cartões. Como $0, 1, 8$ não se alteram de cabeça para baixo e como 6 de cabeça para baixo se transforma em 9, um só cartão pode representar dois números (por exmeplo, 06198 e 86190). Qual é o número mínimo de cartões para representar todos os números de cinco dígitos?

Exercício 55. No Senado Federal, o distrito federal e os 26 estados da federação têm 3 representantes cada. Deve-se formar uma comissão de modo que todos os estados e o Distrito federal estejam representados por 1 ou 2 senadores. De quantos modos essa comissão pode ser formada?

4 Miscelânia

Exercício 56. Permutam-se de todos os modos possíveis os algarismos 1,2,4,6,7 e escrevem-se os números assim formados em ordem crescente.

1. que lugar ocupa o número 62417?
2. qual o número que ocupa o 66° lugar?
3. qual o 200° algarismo escrito?
4. qual a soma dos números assim formados?

Exercício 57. De quantos modos é possível sentar 7 pessoas em cadeiras em fila de modo que duas determinadas pessoas dessas 7 não fiquem juntas?

Exercício 58. De quantos modos é possível colocar em uma prateleira 5 livros de matemática, 3 de física e 2 de estatística, de modo que livros de um mesmo assunto permaneçam juntos?

Exercício 59. Quantas são as permutações dos números $(1, 2, \ldots, 10)$ nas quais o 5 está situado à direita do 2 e à esquerda do 3, embora não necessariamente em lugares consecutivos?

Exercício 60. De quantos modos r rapazes e m moças podem se colocar em fila de modo que as moças fiquem juntas?

Exercício 61. Delegados de 10 países devem se sentar em 10 cadeiras em fila. De quantos modos isso pode ser feito se os delegados do Brasil e de Portugal devem sentar juntos e o do Iraque e o dos Estados Unidos não podem sentar juntos?

Exercício 62. Um cubo de madeira tem umm face da cada cor. Quantos dados diferentes podemos formar gravando os números de 1 a 6 sobre essas faces?

Exercício 63. Quantos dados diferentes podemos formar gravando números de 1 a 6 sobre as faces indistiguíveis de um cubo de madeira?

Exercício 64. Um campeonato é disputado por 12 clubes em rodadas de 6 jogos cada. De quantos modos é possível selecionar os jogos de primeira rodada?

Exercício 65. Quantas são as permutações simples dos números $1, 2, \ldots n$ nas quais o elemento que ocupa a k-ésima posição é inferior a $k + 4$, para todo k?

Exercício 66. Quantas são as permutações simples dos números $1, 2, \ldots, n$ nas quais o elemento que ocupa a k-ésima posição é maior que $k - 3$, para todo k?

Exercício 67. (AMC) Uma aranha tem uma meia e um sapato para cada um de seus oito pés. De quantas maneiras diferentes a aranha pode se calçar admitindo que a meia tem que ser colocada antes do sapato?

Exercício 68. (AHSME) Nove cadeiras em uma sala irão ser ocupadas por 6 estudantes e 3 professores A, B e C. Os professores chegam antes dos alunos e escolhem suas cadeiras de modo que entre dois professores exista uma cadeira vazia. De quantas maneiras os três professores podem escolher seus lugares?

Exercício 69. (AHSME) Nós chamamos um número de telefone $d_1d_2d_3 - d_4d_5d_6d_7$ de *legal* se o número $d_1d_2d_3$ é igual a $d_4d_5d_6$ ou a $d_5d_6d_7$. Assuma que cada d_i pode ser qualquer dígito de 0 a 10. Quantos telefones legais existem?

Exercício 70. (Torneio das Cidades 1997) Duas pessoas realizam um truque. A primeira retira 5 cartas de um baralho de 52 cartas (previamente embaralhado por um membro da platéia), olha-as, e caloca-as em uma linha da esquerda para a direita: uma com a face para baixo (não necessariamenete a primeira), e as outras com a face para cima. A segunda pessoa deve adivinhar a carta que está com a face para baixo. Prove que elas podem combinar um sistema que sempre torna isto possível.

Exercício 71. Os números inteiros compreendidos entre 100000 e 99999 são divididos em classes de modo que dois números diferentes estão na mesma classe se e só se eles têm os mesmos algarismos, diferindo apenas na ordem. Assim por exemplo, 52221 e 125252 estão na mesma classe. Quantas classes são assim formadas?

Exercício 72. (Olimpíada Russa)

(i) Uma comissão se reuniu 40 vezes. Em cada reunião estiveram presentes 10 pessoas de tal maneira que quaisquer dois dos membros da comissão não estiveram juntos em mais de uma oportunidade. Demonstre que a quantidade de membros da comissão é maior que 60.

(ii) Demonstre que com 25 pessoas não se pode formar mais que 30 comissões de 5 pessoas cada uma de modo que não haja duas comissões que tenham mais de um membro em comum.

Exercício 73. Há n tipos de doce na loja do Zé. m amigos se juntam para ir à loja e cada um compra k doces diferentes. Cada tipo de doce é comprado por r dos amigos. Cada par de tipo de doces é escolhido por t amigos. Prove que:

(i) $mk = nr$;

(ii) $r(k-1) = t(n-1)$.

Exercício 74. (OBM) Quantos números de 1 até 1983, podem ser escritos como soma de duas ou mais potências distintas de 3?

Exercício 75. Determine o número de quadrados com todos os seus vértices pertencentes a um reticulado de pontos 10×10.

Exercício 76. Encontre o número de pares ordenados (x, y) de inteiros, tais que $x^2 + y^2 \leq 5$.

Exercício 77. Com os dígitos 1 e 2 formamos 5 números de n dígitos de tal forma que dois quaisquer destes números coincidam em exatamente m casas decimais e não existe nenhuma casa decimal onde coincidam os 5 números. Demonstre que:

$$\frac{2}{5} \leq \frac{m}{n} \leq \frac{3}{5}.$$

Exercício 78. O número 3 pode ser expresso como uma soma ordenada de uma ou mais inteiros positivos de 4 maneiras dife-rentes:

$$3, \quad 1+2, \quad 2+1, \quad 1+1+1.$$

Mostre que todo inteiro n pode ser expresso de 2^{n-1} maneiras

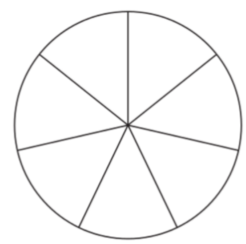
Exercício 79. Considere o conjunto $M = \{1, 2, \ldots, 1000000\}$ e seu subconjunto A formado por todos os números da forma $m^2 + k^3$ com m e n naturais. Quem tem mais elementos: A ou $M \backslash A$?

Exercício 80. Alguns asteriscos estão escritos nas casas de um tabuleiro $m \times n (m < n)$, de modo que existe pelo menos um asterisco em cada coluna. Mostre que que existe um asterisco A tal que $l_A > c_A$, onde l_a e c_A denotam as quantidade de asteriscos na linha e coluna de A, respectivamente.

Exercício 81. Dado um conjunto de pessoas, forma-se comitês compostos de r pessoas cada e de modo que dados quaisquer $r+1$ comitês, existe pelo menos uma pessoa que está em todos esses comitês. Mostre que existem uma pessoa que está em todos os comitês.

Exercício 82. (Colômbia 1998) Considere um tabuleiro $m \times n$ e três cores. Desejamos colorir cada segmento do tabuleiro com uma das três cores de modo que cada quadradinho tenha dois lados de uma cor e dois lados de outra cor. Quantas colorações são possíveis?

Exercício 83. (Mathcounts 2013) Uma roleta circular possui 7 seções de igual tamanho e cada uma delas será pintada com uma dentre duas cores. Duas colorações são consideradas iguais se uma pode ser rotacionada para produzir a outra. De quantas maneiras a roleta pode ser pintada?



Exercício 84. (Banco de Questões da OBMEP 2017) Um quadrado Latino é um tabuleiro $n \times n$ preenchido com n símbolos distintos de modo que em cada linha e em cada coluna não existam símbolos repetidos. Sabemos que existem 576 Quadrados Latinos distintos de dimensões 4×4. De quantos modos podemos completar o quadrado abaixo, que já possui duas casas preenchidas, com os algarismos $1, 2, 3$ e 4 de modo que em cada linha e coluna figurem os quatro algarismos?

1		2	

Exercício 85. (Banco de Questões da OBMEP 2017) Existem $2m$ miçangas de m cores distinas, sendo duas de cada cor. Essas miçangas são distribuidas em m caixas, com duas em cada caixa, de modo que é possível escolher uma miçanga em cada uma delas e obter um conjunto de m miçangas de cores distintas. Prove que o número de maneiras de fazermos esse tipo de escolha é necessariamente uma potência de 2.