Semana Olímpica 2017
Indução.
Nível 2

Samuel Feitosa

Exercício 1. Prove, por indução, que para todo $n \in \mathbb{N}$, temos

$$1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Exercício 2. Prove que, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n-1) = n^2.$$

Exercício 3. (Desigualdade de Bernoulli) Para $x > -1$ e $n \geq 1$, com $n \in \mathbb{N}$, vale que

$$(1+x)^n \geq 1 + nx.$$

Exercício 4. Mostre que

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Exercício 5. Mostre que o número de subconjuntos de $\{1, 2, \ldots, n\}$ é 2^n.

Exercício 6. Prove que o número de diagonais de um polígono de n lados é

$$\frac{n(n-3)}{2}.$$

Exercício 7. Mostre que

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \ldots + \frac{1}{(n-1) \cdot n} = \frac{n-1}{n}$$

Exercício 8. Mostre que

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \ldots + (n-1) \cdot n = \frac{(n-1)n(n+1)}{3}$$

Exercício 9. Mostre que, para qualquer natural n, $2^n > n$

Exercício 10. Encontre todos os naturais n tais que:

(a) $2^n > 2n + 1$.

(b) $2^n > n^2$.

Exercício 11. Prove que a soma dos n primeiros cubos perfeitos é $\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

Exercício 12. Prove que

$$\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots 2n} \leq \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$$

Exercício 13. Prove que um quadrado pode ser dividido em n quadrados para $n \geq 6$.

Exercício 14. Prove que um triângulo equilátero pode ser dividido em n triângulos equiláteros para $n \geq 6$.

Exercício 15. Em quantas partes n retas podem dividir o plano se não existem duas retas paralelas nem três concorrentes.

Exercício 16. (Olimpíada Cearense de Matemática - 2000) Considere todos os subconjuntos não vazios do conjunto $\{1, 2, ..., n\}$, dos n primeiros números naturais. Para cada um desses subconjuntos calculamos o produto de seus elementos. Encontre a soma de todos os produtos obtidos. (Obs: Se um subconjunto tem um único elemento, esse elemento é o produto).

Exercício 17. (Olimpíada Cearense de Matemática - 1999) Teorema: Para todo n, num conjunto de n bolas todas elas possuem a mesma cor. Corolário: Todas as bolas do mundo têm a mesma cor Demonstração do Teorema: A demonstração do teorema será feita usando o Princípio da Indução Finita. O resultado é válido para $n = 1$ pois, num conjunto com uma bola, todas elas têm a mesma cor! Suponha que o teorema é válido para todo conjunto com i bolas. Considere um conjunto com $i + 1$ bolas. Retirando uma delas, o conjunto restante possui i bolas e pela hipótese indutiva todas possuem a mesma cor, digamos amarela. Retire uma das bolas amarela desse conjunto e retorne a bola de cor desconhecida, anteriormente retirada. Obtemos novamente um conjunto com i bolas e pelo o que foi discutido anteriormente possui $i - 1$ bolas amarelas e pela hipótese indutiva possui todas as bolas de mesma cor. Segue que a bola de cor desconhecida também é amarela. Assim todas as $i + 1$ bolas são amarelas. Como você sabe existem bolas de várias cores. Descubra o que está errado na demonstração do teorema.

Exercício 18. (Olimpíada Búlgara) Encontre o número de subconjuntos não-vazios de $S_n = \{1, 2, \ldots, n\}$ tais que não existem dois números consecutivos em um memsmo conjunto.

Exercício 19. Geislan desenhou algumas diagonais de um polígono de modo que que o polígono ficou dividido em triângulos. Mostre que Davi pode pintar os vértices do polígono de três cores de modo que não existam dois vértices de um triângulo da mesma cor.

Exercício 20. O número 3 pode ser expresso como uma soma ordenada de uma ou mais inteiros positivos de 4 maneiras dife-rentes:

$$3, \quad 1+2, \quad 2+1, \quad 1+1+1.$$

Mostre que todo inteiro n pode ser expresso de 2^{n-1} maneiras

Exercício 21. (Leningrado) No Ceará existem n cidades e $2n-1$ estradas de mão única. Cada estrada une duas cidades sendo possível ir de uma cidade para qualquer outra através dessas estradas. Demonstre que uma estrada pode ser destruida de modo que ainda seja possível ir de uma cidade para qualquer outra.

Exercício 22. (USAMO 2000) Qual é o número máximo de quadrados de um tabuleiro 1000×1000 podem ser escolhidos de modo que não existam dois deles numa mesma linha ou coluna?

Exercício 23. (OBM 2007) Mostre que existe um inteiro positivo a tal que $\dfrac{a^{29}-1}{a-1}$ tem pelo menos 2007 fatores primos distintos.

Exercício 24. Determine um inteiro positivo N com a seguinte propriedade: se m, n são inteiros positivos tais que $m < n$ e $n \geq N$, então a desigualdade

$$m < \left(1 + \frac{1}{2007}\right)^n$$

é verificada.

Exercício 25. Seja n um inteiro positivo. Existe uma permutação $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ de $(1, 2, \ldots, n)$ tal que não existem índices $i < k < j$ para os quais $a_k = \dfrac{1}{2}(a_i + a_j)$?

Exercício 26. Dizemos que um número é *triangular* se for da forma $n(n+1)/2$, para algum inteiro positivo n. Ache todos os números que podem ser escritos como soma de números triangulares distintos.

Exercício 27. Existem 1000 cidades em Shinelândia e alguns pares de cidades são ligadas por uma estrada de terra. É possível viajar de uma cidade para qualquer outra através das estradas de terra. Prove que o governo de Shinelândia pode pavimentar algumas estradas de modo que de cada cidade saia um número ímpar de estradas pavimentadas.

Exercício 28. Geislan desenhou algumas diagonais de um polígono de modo que que o polígono ficou dividido em triângulos. Mostre que Davi pode pintar os vértices do polígono de três cores de modo que não existam dois vértices de um triângulo da mesma cor.

Exercício 29. (O Problema da Galeria de Arte) As paredes de uma galeria de arte formam um polígono de n-lados não necessariamente convexo. Guardas são colocados em posições fixas na galeria. Assumindo que os guardas não podem caminhar mas podem rodar suas cabeças, qual o número mínimo de guardas necessários que devemos colocar na galeria para termos certeza que todo o interior da mesma estará vigiado.

Exercício 30. (Rússia 2001) Em uma festa, existem $2n+1$ pessoas. Sabemos que para qualquer grupo de n pessoas, existe uma pessoa fora do grupo que as conhecem. Mostre que existe uma pessoa que conhece todos na festa.

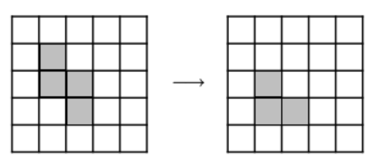
Exercício 31. Considere um tabuleiro $n \times n$ com todas as suas entradas pertencentes ao conjunto $\{0, 1\}$. Se todas as linhas são distintas, mostre que podemos apagar uma coluna de modo que as linhas restantes serão ainda distintas.

Exercício 32. (TT 1983) Considere um n-ágono regular com k de seus vértices pintados. Uma coloração é chamada de quase uniforme se, para todo inteiro positivo m, a seguinte condição é satisfeita: Se M_1 é um conjunto de m vértices consecutivos de P e M_2 é outro tal conjunto, então o número de vértices coloridos em M_1 difere do número de vértices coloridos em M_2 por no máximo uma unidade. Prove que para todos inteiros positivos k e n com $(k \leq n)$ uma coloração quase uniforme existe e é única a menos de rotações.

Exercício 33. (Olimpíada Russa - 1995) Em um plano, considere um conjunto finito de quadrados identicos cujos lados são paralelos. Para quaisquer $k+1$ quadrados, pelo menos dois deles contém pontos em comum. Prove que este conjunto pode ser dividido em não mais que $2k-1$ subconjuntos de modo que em cada subconjunto todos os quadrados tenham um ponto em comum.

Exercício 34. (Teste de Seleção da Eslovênia para a IMO) Dados um triângulo ABC no plano e um inteiro positivo $n \geq 4$, prove que é possível decompor o triângulo em n triângulos isósceles.

Exercício 35. Suponha que n quadrados de um tabuleiro infinito são coloridos de cinza e que o os quadrados restantes são coloridos de branco. Em cada passo, um novo tabuleiro de quadrados é obtido baseado no anterior como segue: Para cada posição no tabuleiro, examine o quadrado da posição em questão, o quadrado imediatamente acima e o quadrado imediatamente à sua direita. Se existem dois ou três quadrados com a cor cinza dentre eles, então no novo tabuleiro essa posição terá a cor cinza, caso contrário ela terá a cor branca. Mostre que, após no máximo n passos, todos os quadrados terão a cor branca. Apresentamos um exemplo com $n = 4$:



O primeiro tabuleiro mostra a configuração inicial e o segundo mostra a configuração após um passo.

Exercício 36. (Rioplatense 2002) Seja A um conjunto de números inteiros positivos. Dizemos que um conjunto B de inteiros positivos é uma *base* de A se todo elemento de A puder ser escrito como soma de elementos de algum subconjunto de B e, dados quaisquer dois subconjuntos de B, a soma dos elementos de cada subconjunto é distinta. Dado um inteiro positivo n, mostre que existe um menor número $r(n)$ para o qual qualquer conjunto A de n elementos admite uma base com não mais que $r(n)$ elementos.

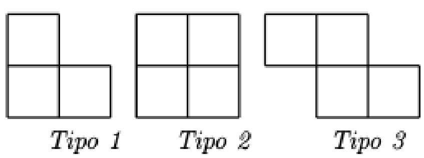
Exercício 37. (URSS 1988) A sequência de inteiros a_n é dada por $a_0 = 0$, $a_n = P(a_{n-1})$, onde $p(x)$ é um polinômio cujos coeficientes são inteiros positivos. Mostre que para quaisquer inteiros positivos m, k com máximo divisor comum d, o máximo divsor comum de a_m e a_k é a_d.

Exercício 38. Prove que existe um conjunto S de 3^{1000} pontos no plano tal que, para cada ponto P de S, existem pelo menos 2000 pontos em S cuja distância para P é exatamente uma unidade.

Exercício 39. (Leningrado 1991) Quadrados de um tabuleiro $N \times N$ são pintados de vermelho, azul e verde de modo que pelo menos um quadrado azul é adjacente a cada quadrado vermelho, um quadrado verde é adjacente a cada quadrado azul e um quadrado vermelho é adjacente a cada quadrado verde. (Dois quadrados são adjacentes se eles compartilham um lado em comum). Seja R o número de quadrados vermelhos. Mostre que $\dfrac{N^2}{11} \leq R \leq \dfrac{2N^2}{3}$.

Exercício 40. Uma senha de banco consiste de um número de 3 dígitos pertencentes ao conjunto $\{1, 2, \ldots, 8\}$. Devido a um defeito no caixa eletrônico, a conta pode ser operada se acertarmos apenas dois dos 3 dígitos. Então a conta pode ser operada certamente após 64 tentativas. Qual o número mínimo de tentativas necessárias para podermos operar a conta?

Exercício 41. (Leningrado) Um tabuleiro $(2n-1) \times (2n-1)$ foi coberto sem sobreposição pelas figuras abaixo



Mostre que foram utilizadas pelo menos $(4n-1)$ figuras do tipo 1.

Exercício 42. São dados 100 pontos no plano. Mostre que podemos cobrir estes pontos com alguns círculos disjuntos, de tal maneira que a soma dos diâmetros destes é menor que 100, e a distância entre quaisquer dois círculos é maior que 1.

Exercício 43. Considere um conjunto

$$S = \{a_1 = 1, a_2, \ldots, a_n\}$$

de inteiros que satisfazem $a_i \leq a_{i+1} \leq 2a_i$, para $i = 1, 2, \ldots, n-1$ e cuja soma $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ é par. É possível dividirmos S em dois conjuntos disjuntos de mesma soma?

Exercício 44. Em cada quadrado de um tabuleiro $(2^n - 1) \times (2^n - 1)$ é escrito $+1$ ou -1. Dizemos que a distribuição é *equilibrada* se cada número é igual ao produto de seus vizinhos (dois quadrados são vizinhos se compartilham um lado em comum). Calcule a quantidade de distribuições equilibradas.

Exercício 45. Sejam $P_1, P_2, \ldots, P_n$ pontos sobre uma circunferência. Entre cada par de pontos, existe um segmento de reta pintado de vermelho ou azul de modo que P_iP_j é vermelho se e somente se $P_{i+1}P_{j+1}$ é azul, para quaisquer índices $1 \leq i < j \leq n$ (aqui, $P_{n+1} = P_1$).

(a) Para quais valores de n tal coloração é possível?

(b) Mostre que tais colorações têm a seguinte propriedade:

”Dados quaisquer dois pontos, existe uma linha poligonal de no máximo três segmentos, todos vermelhos, unindo esses dois pontos.”

Respostas e Soluções.

1. Queremos analisar o conjunto S para o qual a setença dada é verdadeira. Claramente $1 \in S$, pois

$$1 = \frac{1(1+1)}{2}.$$

Suponha $k \in S$, ou seja,

$$1 + 2 + \ldots + k = \frac{k(k+1)}{2}.$$

Provemos que a sentença dada também é válida para $n = k+1$:

$$\begin{aligned} 1 + 2 + \ldots + k + (k+1) &= (1 + 2 + \ldots + k) + (k+1) \\ &= \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) \\ &= \frac{(k+1)(k+2)}{2}. \end{aligned}$$

Para obtermos a penúltima igualdade, usamos nossa hipótese de indução, isto é, que $k \in S$. Assim, como a propriedade é válida para $k+1$, segue pelo Princípio de Indução que a propriedade é válida para todo $n \in \mathbb{N}$.

2. Claramente a sentença dada é válida para $n = 1$, pois

$$1 = 1^2$$

Suponha que a afirmação seja verdadeira para $n = k$, ou seja,

$$1 + 3 + \ldots + (2k-1) = k^2$$

Provemos que ela também é válida para $n = k+1$:

$$\begin{aligned} 1 + 3 + \ldots + (2k-1) + (2(k+1)-1) &= \\ (1 + 3 + \ldots + (2k-1)) + (2(k+1)-1) &= \\ k^2 + (2(k+1)-1) &= \\ (k+1)^2 &= . \end{aligned}$$

Assim, como a afirmação é válida para $k+1$, segue por indução que ela é válida para todo $n \in \mathbb{N}$.

3. Para $n = 1$, ambos os lados da desigualdade são iguais e, consequentemente, ela é verdadeira. Suponha que a desigualdade seja verdadeira para $n = k$, ou seja,

$$(1+x)^k \geq 1 + kx.$$

Assim, temos

$$\begin{aligned} (1+x)^{k+1} &= (1+x)(1+x)^k \\ &\geq (1+x)(1+kx) \\ &= 1 + x + kx + kx^2 \\ &\geq 1 + x(k+1), \end{aligned}$$

Como a desigualdade também é verdadeira para $n = k+1$, segue, por indução, que ela é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$.

24. De acordo com a desigualdade de Bernoulli,

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{2007}\right)^{2007} &> 1 + \frac{1}{2007} \cdot 2007 = 2 \\ \Rightarrow \left(1 + \frac{1}{2007}\right)^{2007 \cdot 15} &> 2^{15} \\ \left(1 + \frac{1}{2007}\right)^{30105} &> 32768 > 30105 \end{aligned}$$

Agora, provaremos por indução que

$$n < \left(1 + \frac{1}{2007}\right)^n, \ \forall n \geq 30105.$$

Suponha que

$$n < \left(1 + \frac{1}{2007}\right)^n.$$

Multiplicando essa desigualdade por $1 + 1/2007$, temos

$$n + 1 < n + \frac{n}{2007} < \left(1 + \frac{1}{2007}\right)^{n+1},$$

onde na primeira desigualdade usamos o fato de que $n > 2007$.

25. Sim, é possível, e basta mostrarmos o resultado para os números da forma $n = 2^k$. O resultado seguirá desse. Por exemplo, se queremos achar a permutação para $n = 2000$, é suficiente acharmos uma para $n = 2048$ e depois apagarmos os números de 2001 até 2048.
Vamos mostrar o resultado por indução. Para $k = 1$ e $k = 2$, podemos tomar as permutações $(1, 2)$ e $(2, 4, 1, 3)$. Suponha agora que $(a_1, a_2, \ldots, a_{2^k})$ é uma permutação dos números $(1, 2, \ldots, 2^k)$ que dá certo. Considere as seqüências $2a_1, 2a_2, \ldots, 2a_{2^k}$ e $2a_1 - 1, 2a_2 - 1, \ldots, 2a_{2^k} - 1$. A primeira contém todos os números pares entre 1 e 2^{k+1} e a segunda todos os ímpares nesse mesmo intervalo. Daí,

$$(2a_1, 2a_2, \ldots, 2a_{2^k}, 2a_1 - 1, 2a_2 - 1, \ldots, 2a_{2^k} - 1)$$

é uma permutação de $(1, 2, \ldots, 2^{k+1})$. Essa é a seqüência que estávamos procurando. Dois números de metades distintas da permutação acima têm paridades distintas, e portanto a média aritmética não é inteira. Agora, se existissem $i < j < l$ tais que $\dfrac{2a_i + 2a_l}{2} = 2a_j$, então teríamos $\dfrac{a_i + a_l}{2} = a_j$, um absurdo, pela hipótese de indução. O mesmo ocorre se a_i e a_l estão na outra metade. Esse é o fim do nosso passo indutivo, e o problema está provado.

26. Vamos mostrar que isso ocorre para $k \geq 34$ construindo, por indução, exemplos para números no conjunto $\{a_n, \ldots, a_{n+1}\}$ a partir de $\{a_{n-1}, \ldots, a_n\}$. Para tal, vamos analisar vários casos iniciais e construir, a partir dos casos anteriores, exemplos para $k \leq 136 = a_{16}$, de modo que possamos supor $n \geq 16$. Essa condição garantirá o funcionamento da construção enunciada acima.

Os primeiros números triangulares são:

$$\begin{aligned} a_1 &= 1 & a_7 &= 28 \\ a_2 &= 3 & a_8 &= 36 \\ a_3 &= 6 & a_9 &= 45 \\ a_4 &= 10 & a_{10} &= 55 \\ a_5 &= 15 & a_{11} &= 66 \\ a_6 &= 21 & a_{12} &= 78. \end{aligned}$$

Analisando os casos pequenos, temos:

$1 = 1$

2 não é S-triangular

$3 = 3$

$4 = 3 + 1$

5 não é S-triangular

$6 = 6$

$7 = 6 + 1$

8 não é S-triangular

$9 = 6 + 3$

$10 = 10$

$11 = 10 + 1$

12 não é S-triangular

$13 = 10 + 3$

$14 = 10 + 3 + 1$

$15 = 15$

$16 = 15 + 1$

$17 = 10 + 6 + 1$

$18 = 15 + 3$

$19 = 15 + 3 + 1$

$20 = 10 + 6 + 3 + 1$

$20 = 10 + 6 + 3 + 1$

$21 = 21$

$22 = 21 + 1$

23 não é S-triangular

$24 = 21 + 3$

$25 = 21 + 3 + 1$

$26 = 15 + 10 + 1$

$27 = 21 + 6$

$28 = 28$

$29 = 28 + 1$

$30 = 21 + 6 + 3$

$31 = 21 + 10$

$32 = 21 + 10 + 1$

33 não é S-triangular

$34 = 28 + 6$

$35 = 28 + 6 + 1$

$36 = 36$

$37 = 36 + 1$

$39 = 36 + 3$

$40 = 36 + 3 + 1.$

Daí:

- Os números em $28 + \{13, 14, \ldots, 22\} = \{41, 42, \ldots, 50\}$ são S-triangulares.
- Os números em $36 + \{15, \ldots, 22\} = \{51, \ldots, 58\}$ são S-triangulares.
- $59 = 45 + 14$ é S-triangular.
- Os números em $36 + \{24, \ldots, 32\} = \{60, \ldots, 68\}$ são S-triangulares.
- Os números em $45 + \{24, \ldots, 32\} = \{69, \ldots, 77\}$ são S-triangulares.
- 78 é S-triangular (de fato, ele é triangular).
- Os números em $55 + \{24, \ldots, 32\} = \{79, \ldots, 87\}$ são S-triangulares.
- $88 = 78 + 10$ é S-triangular.
- Os números em $55 + \{34, \ldots, 54\} = \{89, \ldots, 109\}$ são S-triangulares.
- Os números em $66 + \{44, \ldots, 65\} = \{110, \ldots, 131\}$ são S-triangulares.
- Os números em $78 + \{54, \ldots, 58\} = \{132, \ldots, 136\}$ são S-triangulares.

Façamos a indução. Suponha que $n \geq 16$ e que todo número do conjunto

$$\{a_{n-1}, \ldots, a_n\}$$

seja S-triangular. Temos as desigualdades

$$4n - 6 \geq 58 \quad \text{e} \quad a_{n-4} = \frac{(n-4)(n-3)}{2} > 5n - 5.$$

A primeira é óbvia. Para a segunda, note que ela equivale à inequação

$$n^2 - 17n + 22 > 0,$$

cuja maior raiz é

$$\frac{17 + \sqrt{17^2 - 4 \cdot 22}}{2} = \frac{17 + \sqrt{201}}{2} < \frac{17 + 15}{2} = 16.$$

Logo, todo número em

$$a_{n-4} + \{4n - 6, 4n - 5, \ldots, 5n - 5\} = \{a_n, a_n + 1, \ldots, a_{n+1}\}$$

é S-triangular.

Assim, os únicos números que não são S-triangulares são $2, 5, 8, 12, 23$ e 33.

33. Primeiramente vejamos como resolver uma versão mais simples desse problema para efeitos de motivação. Considere um conjunto finito de intervalos identicos na reta com a propriedade de que não existam $k+1$ intervalos mutuamente disjuntos. Provemos, por indução, que é possível dividí-los em no máximo k subconjuntos de modo que todos os elementos de um mesmo subconjunto possuam um ponto em comum. Considere o intervelo I que está mais à esquerda. Todos os intervalos que intersectam I contém o seu extremo direito. Se desconsiderarmos o subconjunto dos intervalos que intersectam I, não existem k intervalos mutuamente disjuntos e por indução eles podem ser agrupados em $k-1$ subcojuntos com a propriedade desejada.

Agora podemos voltar ao problema original. A prova será por indução. Considere os quadrados que estão mais à esquerda e posteriormente aquele que está mais ao norte. Qualquer quadrado que o intersecte, deverá conter um de seus dois vértices à direita(ou o superior ou o inferior). Isso nos dá dois subconjuntos em que todos os quadrados possuem um ponto em comum. Para os demais quadrados, sabemos que não podem existir k quadrados mutuamente disjuntos e, por hipótese de indução, deverão existir $2k-3$ subconjuntos com a propriedade que desejamos. Unindo-os aos dois subconjuntos iniciais temos $2k-1$ subconjuntos.

38. Vamos mostrar, por indução sobre k, que existe um conjunto S_k de 3^k pontos no plano tal que cada ponto de S_k dista uma unidade de pelo menos $2k$ pontos de S_k. Tomando $k = 1000$, provamos o problema.

Caso inicial: tome S_1 como os vértices de um triângulo eqüilátero de lado 1.

Hipótese de indução: suponha a existência de S_k como acima, para algum $k \geq 1$.

Passo indutivo: seja v um vetor. A partir de cada ponto P de S_k, construa um triângulo eqüilátero Δ_P de lado 1 na direção de v. Se v puder ser escolhido de modo que os vértices de Δ_P e Δ_Q não coincidam sempre que $P \neq Q$, então o conjunto S_{k+1} formado pelos vértices de todos os triângulos Δ_P, $P \in S_k$, satisfaz o problema. Para mostrar isso, note inicialmente que S_{k+1} nada mais é do que a união de S_k e de duas translações de S_k de uma unidade cujas direções formam um ângulo de 60^{o}. Assim, S_{k+1} tem $3 \cdot 3^k = 3^{k+1}$ pontos, e cada ponto de S_{k+1} dista uma unidade de pelo menos $2(k+1)$ pontos de S_{k+1}: $2k$ devido à propriedade de S_k e 2 devido à construção dos triângulos Δ_P.
Para escolher v, basta tomá-lo em uma direção distinta de todas as direções de pares de pontos de S_k. Isso pode ser feito porque a quantidade de direções de pares de pontos de S_k é finita.

44. A distribuição apenas com $+1$, chamada a partir de agora de *trivial*, é equilibrada. Se $n = 1$, temos duas distribuições equilibradas. Mostraremos, por indução sobre n, que se $n > 1$, então a única distribuição equilibrada é a trivial. O caso $n = 2$ é de fácil verificação. Suponha que o resultado seja válido para algum $n > 1$ e, por absurdo, suponha que exista uma distribuição não-trivial

$$A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq 2^{n+1}-1}$$

do tabuleiro $(2^{n+1}-1) \times (2^{n+1}-1)$. Se A é simétrica com respeito às coluna e linha centrais, quer dizer, se

$$a_{i,j} = a_{2^{n+1}-i,j} \quad \text{e} \quad a_{i,i} = a_{i,2^{n+1}-j}\,, \quad 1 \leq i,j \leq 2^{n+1}-1$$

então

$$a_{i,2^n} = a_{2^n,i} = 1\,,\ i = 1,2,\ldots,2^{n+1}-1$$

e, além disso, a restrição de A a cada um dos quatro subtabuleiros $(2^n-1) \times (2^n-1)$ é equilibrada.
Pela hipótese de indução, elas são triviais e portanto A também. Assim, concluiremos o problema se mostrarmos que A pode ser tomada como acima.

Se esse não é o caso, digamos se A não é simétrica com respeito à coluna central, consideramos a distribuição

$$B = (b_{ij}) = (a_{ij} \cdot a_{i,2^{n+1}-j}),$$

que é equilibrada (deixamos a prova para o leitor), simétrica com respeito à coluna central e, além disso, não-trivial, pois como A não é simétrica com respeito à coluna vertical, existem índices i,j tais que

$$a_{ij} \neq a_{i,2^{n+1}-j} \implies b_{ij} = -1.$$

Se B for simétrica com respeito à linha central, estamos terminados. Senão, repetimos o argumento acima tomando

$$C = (b_{ij} \cdot b_{2^{n+1}-i,j}),$$

que é uma distribuição equilibrada, não trivial e simétrica horizontal e verticalmente. Isso conclui o afirmado.