# Semana Olímpica 2017
# Nullstellensatz Combinatório.
# Nível U

Samuel Feitosa

**Teorema 1** Sejam $F$ um corpo arbitrário e $f = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ seja um polinômio em $F[x_1, \ldots, x_n]$. Sejam $S_1, S_2 \ldots, S_n$ subconjuntos não vazios de $F$ e defina $g(x_i) = \prod_{s \in S_i}(x_i - s)$. Se $f$ se anula sobre todos os zeros comuns de $g_1, g_2, \ldots, g_n$, i.e., $f(s_1, s_2, \ldots, s_n) = 0$ para todo $s_i \in S_i$, então existem polinômios $h_1, h_2, \ldots, h_n$ em $F[x_1, x_2, \ldots, x_n]$, satisfazendo $\deg(h_i) \leq \deg(f) - \deg(g_i)$, de modo que

$$f = \sum_{i=1}^{n} h_i g_i.$$

**Teorema 2** Sejam $F$ um corpo arbitrário e $f = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ seja um polinômio em $F[x_1, \ldots, x_n]$. Suponha que $\deg(f)$ é $\sum_{i=1}^{n} t_i$, onde cada $t_i$ é um inteiro não negativo, e que o coeficiente de $\prod_{i=1}^{n} x_i^{t_i}$ em $f$ é não-nulo. Então, se $S_1, S_2, \ldots, S_n$ são subconjuntos de $F$ com $|S_i| > t_i$, existem $s_1 \in S_1, s_2 \in S_2, \ldots, s_n \in S_n$ tais que

$$f(s_1, s_2, \ldots, s_n) \neq 0.$$

**Exercício 1.** (Cauchy-Davenport) Se $p$ é um número primo, $A$ e $B$ são suconjuntos não vazios de $\mathbb{Z}_p$, então

$$|A + B| \geq \min\{p, |A| + |B| - 1\}.$$

**Proposição 1** Seja $A = (a_{ij})$ uma matriz $n \times n$ sobre um corpo $F$ com *permanente* $Per(A)$ não nulo sobre $F$. Então, para qualquer vetor $b = (b_1, b_2, \ldots, b_n) \in F^n$ e para qualquer família de conjuntos $S_1, S_2, \ldots, S_n$ de $F$, cada um com cardinalidade 2, existe um vetor $x$ em $S_1 \times S_2 \times \ldots \times S_n$ tal que, para todo $i$, a coordenada de $Ax$ difere de $b_i$.

**Exercício 2.** Para qualquer primo $p$, mostre que qualquer sequência de $2p - 1$ elementos de $\mathbb{Z}_p$ contém uma subsequência de cardinalidade $p$ de modo que a soma dos seus elementos é 0 em $\mathbb{Z}_p$.

**Exercício 3.** (IMO 2009/Versão adaptada) Suponha que $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ são inteiros distintos e $M$ é um conjunto de inteiros com $|M| \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$. Então existe uma permutação $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ da sequência $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ tal que nenhuma das somas $b_1, b_1 + b_2, \ldots, b_1 + b_2 + \ldots b_{n-1}$ é um elemento de $M$.

**Exercício 4.** (IMO 2007) Seja $n$ um inteiro positivo. Considere

$$S = \{(x, y, z) | x, y, z \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}, (x, y, z) \neq (0, 0, 0)\}$$

como um conjunto de $(n + 1)^3 - 1$ pontos no espaço tridimensional. Determine o menor número possível de planos, que não passem pela origem, mas de modo que a união deles contenha o conjunto $S$.

**Exercício 5.** (Martin Gardner 1976/ Scientific American) Dizemos que uma distribuição de rainhas em um tabuleiro de xadrez é *boa* se não existem 3 delas em uma mesma linha, coluna ou diagonal (retas com inclinação $\pm 1$). No desenho abaixo, temos uma distribuição *boa* em um tabuleiro $8 \times 8$. Seja $m_3(n)$ o menor número de rainhas que podem ser colocadas em um tabuleiro de xadrez $n \times n$ formando uma distribuição *boa*, mas com a propriedade de que qualquer acréscimo de uma rainha em uma casa vazia remova essa propriedade. Mostre que $m_3(n) \geq n$.