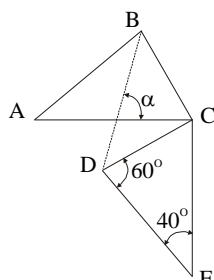


- Prova de 25 questões.
- A duração da prova é de 3 horas.
- Não é permitido o uso de calculadoras nem consultas a notas ou livros.
- Você pode solicitar papel para rascunho.
- Entregue apenas a folha de respostas.

1. Quantos números de dois algarismos não são primos nem múltiplos de 2, 3 ou 5 ?
A) 1 B) 3 C) 2 D) 4 E) mais de 4

2. O triângulo CDE pode ser obtido pela rotação do triângulo ABC de 90° no sentido anti-horário ao redor de C , conforme mostrado no desenho abaixo. Podemos afirmar que α é igual a:



- A) 75° B) 65° C) 70° D) 45° E) 55°

3. No conjunto $\{101, 1\ 001, 10\ 001, \dots, 1\ 000\ 000\ 000\ 001\}$ cada elemento é um número formado pelo algarismo 1 nas extremidades e por algarismos 0 entre eles. Alguns desses elementos são números primos e outros são compostos. Sobre a quantidade de números compostos podemos afirmar que:
A) é igual 11
B) é igual a 4
C) é menor do que 3
D) é maior do que 4 e menor do que 11
E) é 3

4. Uma pera tem cerca de 90% de água e 10% de matéria sólida. Um produtor coloca 100 quilogramas de pera para desidratar até o ponto em que a água represente 60% da massa total. Quantos litros de água serão evaporados? (lembre-se: 1 litro de água tem massa de 1 quilograma).
A) 15 litros B) 45 litros C) 75 litros D) 80 litros E) 30 litros

5. Os números inteiros positivos de 1 a 1000 são escritos lado a lado, em ordem crescente, formando a seqüência 123456789101112131415... 9991000. Nesta seqüência, quantas vezes aparece o grupo “89” ?
A) 98 B) 32 C) 22 D) 89 E) 21

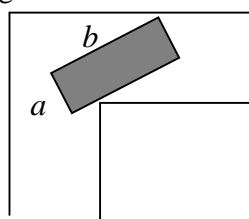
6. Um serralheiro tem 10 pedaços de 3 elos de ferro cada um, mostrados abaixo.



- Ele quer fazer uma única corrente de 30 elos. Para abrir e depois soldar um elo o serralheiro leva 5 minutos. Quantos minutos **no mínimo** ele levará para fazer a corrente?
A) 30 B) 35 C) 40 D) 45 E) 50

7. O número N de três algarismos multiplicado por 7 deu como resultado um número que termina em 171. A soma dos algarismos de N é:
A) 10 **B)** 11 **C)** 12 **D)** 13 **E)** 14
8. Os pontos P_1, P_2, P_3, \dots estão nesta ordem sobre uma circunferência e são tais que o arco que une cada ponto ao seguinte mede 35° . O menor valor de $n > 1$ tal que P_n coincide com P_1 é:
A) 37 **B)** 73 **C)** 109 **D)** 141 **E)** 361
9. $ABCDE$ é um pentágono regular e ABF é um triângulo equilátero interior. O ângulo FCD mede:
A) 38° **B)** 40° **C)** 42° **D)** 44° **E)** 46°
10. Um círculo é dividido, por $2n + 1$ raios, em $2n + 1$ setores congruentes. Qual é o número máximo de regiões do círculo determinadas por estes raios e por uma reta?
A) $3n$ **B)** $3n + 1$ **C)** $3n + 2$ **D)** $3n + 3$ **E)** $4n$
11. Papa-Léguas participou de uma corrida (junto com o Ligeirinho e o Flash), que consistia em dar 100 voltas em um circuito. Como sempre, o Coiote queria pegar o Papa-Léguas e colocou um monte de alpiste no meio da pista. É claro que o Coiote não conseguiu pegar o Papa-Léguas, mas ele fez com que a velocidade média dele na primeira volta fosse de apenas 200 km/h. Sabendo disso, a velocidade média do Papa-Léguas na corrida:
A) Não ultrapassa 200 km/h.
B) Não ultrapassa 250 km/h, mas pode ultrapassar 200km/h.
C) Não ultrapassa 2000 km/h, mas pode ultrapassar os 250km/h.
D) Não ultrapassa 20000 km/h, mas pode ultrapassar os 2000 km/h.
E) Pode ultrapassar 20000 km/h.
12. O número de soluções inteiras distintas da equação $(-6x^2 + 12x - 2)^{x^2 - 2x + 2} = 4$ é:
A) 0 **B)** 1 **C)** 2 **D)** 3 **E)** 4
13. Uma rifa foi organizada entre os 30 alunos da turma do Pedro. Para tal, 30 bolinhas numeradas de 1 a 30 foram colocadas em uma urna. Uma delas foi, então, retirada da urna. No entanto, a bola caiu no chão e se perdeu e uma segunda bola teve que ser sorteada entre as 29 restantes. Qual a probabilidade de que o número de Pedro tenha sido o sorteado desta segunda vez?
A) $1/29$ **B)** $1/30$ **C)** $1/31$ **D)** $1/60$ **E)** $2/31$
14. Cinco animais $A, B, C, D,$ e $E,$ são cães ou são lobos. Cães sempre contam a verdade e lobos sempre mentem. A diz que B é um cão. B diz que C é um lobo. C diz que D é um lobo. D diz que B e E são animais de espécies diferentes. E diz que A é um cão. Quantos lobos há entre os cinco animais?
A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** 5
15. São escritos todos os números de 1 a 999 nos quais o algarismo 1 aparece exatamente 2 vezes (tais como, 11, 121, 411, etc). A soma de todos estes números é:
A) 6882 **B)** 5994 **C)** 4668 **D)** 7224 **E)** 3448

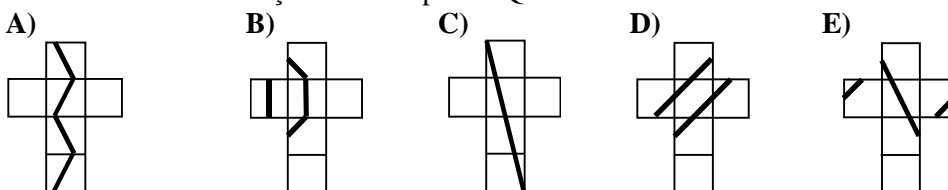
16. Uma mesa retangular, cujos pés têm rodas, deve ser empurrada por um corredor de largura constante, que forma um ângulo reto.



Se as dimensões da mesa são a e b (com $2a < b$), qual deve ser a largura mínima do corredor para que a mesa possa ser empurrada através dele?

- A) $a + b$ B) $(a+b)\frac{\sqrt{2}}{2}$ C) $(a+b)\frac{\sqrt{2}}{4}$ D) $(2a+b)\frac{\sqrt{2}}{4}$ E) $(a+2b)\frac{\sqrt{2}}{4}$

17. Somente uma das figuras a seguir representa a planificação de um cubo na qual está destacada a sua interseção com um plano. Qual?



18. Seja $f(x) = x^2 - 3x + 4$. Quantas soluções reais tem a equação $f(f(f(\dots f(x)))) = 2$

(onde f é aplicada 2001 vezes)?

- A) 0 B) 1 C) 2 D) 2001 E) 2^{2001}

19. Quantos dígitos tem o menor quadrado perfeito cujos quatro últimos dígitos são 2001?

- A) 9 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

20. Seja $ABCD$ um trapézio retângulo cujos únicos ângulos retos são \hat{A} e \hat{B} . M e N são os pontos médios de AB e CD , respectivamente. A respeito dos ângulos $\alpha = \hat{A}NB$ e $\beta = \hat{C}MD$, podemos dizer que:

- A) $\alpha < \beta$
 B) $\alpha > \beta$
 C) $\alpha = \beta$
 D) pode ocorrer qualquer uma das situações das alternativas A), B) e C).
 E) o ângulo α é reto

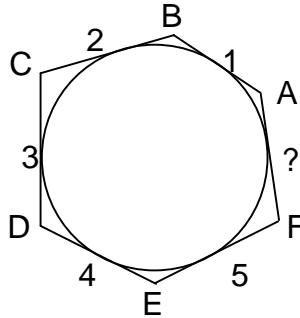
21. A soma dos valores reais de x tais que $x^2 + x + 1 = 156/(x^2 + x)$ é:

- A) 13 B) 6 C) -1 D) -2 E) -6

22. Para cada ponto pertencente ao interior e aos lados de um triângulo acutângulo ABC , considere a soma de suas distâncias aos três lados do triângulo. O valor máximo desta soma é igual

- A) à média aritmética das 3 alturas do triângulo.
 B) ao maior lado do triângulo.
 C) à maior altura do triângulo
 D) ao triplo do raio do círculo inscrito no triângulo.
 E) ao diâmetro do círculo circunscrito ao triângulo.

23. Seja f uma função de Z em Z definida como $f(x) = x/10$ se x é divisível por 10 e $f(x) = x + 1$ caso contrário. Se $a_0 = 2001$ e $a_{n+1} = f(a_n)$, qual é o menor valor de n para o qual $a_n = 1$?
- A) 20
 B) 38
 C) 93
 D) 2000
 E) a_n nunca é igual a 1
24. O hexágono $ABCDEF$ é circunscritível. Se $AB = 1$, $BC = 2$, $CD = 3$, $DE = 4$ e $EF = 5$, quanto mede FA ?



- A) 1 B) 3 C) $15/8$ D) 6 E) 9
25. No triângulo ABC , $AB = 5$ e $BC = 6$. Qual é a área do triângulo ABC , sabendo que o ângulo \hat{C} tem a maior medida possível?
- A) 15 B) $5\sqrt{7}$ C) $7\sqrt{7}/2$ D) $3\sqrt{11}$ E) $5\sqrt{11}/2$

GABARITO

Este é o gabarito para os três níveis. Observe que algumas questões são utilizadas em mais de um nível e a solução é dada apenas uma vez.

Consideramos o uso de uma mesma questão em mais de um nível como um fator interessante e que reflete o caráter da Olimpíada de Matemática como uma prova de raciocínio e não de verificação do aprendizado de material ao qual o aluno tenha sido exposto recentemente.

NÍVEL 1 (5^a. e 6^a. séries)

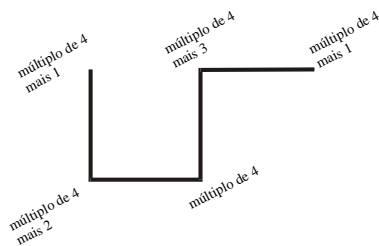
1) E	6) C	11) A	16) D
2) D	7) A	12) D	17) E
3) C	8) B	13) B	18) A
4) B	9) B	14) A	19) D
5) D	10) D	15) C	20) A

RESUMO DAS SOLUÇÕES

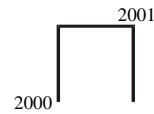
- (E)** Para que a diferença seja a menor possível, os algarismos das centenas desses números devem diferir em uma unidade. Além disso, o número formado apenas por algarismos pares deve ter a menor dezena possível, ou seja, 02; o número formado apenas por algarismos ímpares deve ter a maior dezena possível, ou seja 97. Assim o menor valor possível para a diferença ocorre quando os números são 402 e 397 ou 602 e 597, e, portanto, é 5.
- (D)** Basta escolher um ponto de cada circunferência. Isso pode ser feito de $4 \times 3 \times 2 \times 5 = 120$ maneiras diferentes (no enunciado subentende-se que dos quatro pontos escolhidos de cada vez, não haja três alinhados).
- (C)** Os números da seqüência, quando divididos por 5, deixam resto igual a 1. O menor número de três algarismos nessas condições é o 101.
- (B)** Como os números devem ser compostos e ter dois algarismos, eles devem ser múltiplos de 7, mas não múltiplos de 2, de 3 nem de 5. Só podem ser $7 \times 7 = 49$, $7 \times 11 = 77$ e $7 \times 13 = 91$.
- (D)** O conjunto dado tem 11 números. Os números com quantidade par de zeros são divisíveis por 11. Por exemplo, 1001 é igual a 91×11 (na verdade, basta aplicar o critério de divisibilidade por 11). Há 5 números nessas condições; além disso, o número 101 é primo, logo a quantidade de números compostos é maior do que 4 e menor do que 11. (na verdade, 101 é primo e os dez outros números são compostos).
- (C)** Inicialmente, há 90 kg de água e 10 kg de matéria sólida. As peras devem ser desidratadas até o ponto em que esses 10 kg representem $100\% - 60\% = 40\%$ da massa total, ou seja, até que a massa total seja igual a $\frac{10}{40\%} = \frac{10}{0,4} = 25$ kg. Logo $90 - (25 - 10) = 75$ litros de água serão evaporados.
- (A)** Para formar um triângulo de lado 2, são necessários 4 T, para formar um triângulo de lado 3 são necessários 9 T, etc. Pode-se provar que para formar um triângulo de lado n , são necessários n^2 triângulos T. Logo o triângulo formado por 49 triângulos T tem lado 7.
- (B)** Na seqüência aparecem os números de um algarismo 8,9; com números de dois algarismos aparece uma vez o 89 e o agrupamento 98,99; com números de três algarismos que terminam com 89 temos 189, 289, ..., 989 num total de 9 números; com números que começam com 89, temos 890, 891, ..., 899 num total de 10 números; os agrupamentos 908, 909; 918, 919; ...; 998,999 também aparecem, num total de 10 números. Portanto, 89 aparece $1 + 2 + 9 + 10 + 10 = 32$ vezes.
- (B)** Abrindo uma cadeia de três elos, o serralheiro emenda 4 cadeias de 3 elos, formando um pedaço de 15 elos. Por isso, com 6 elos, ele forma dois pedaços de 15 elos; abrindo mais um elo de um desses pedaços, ele emenda 15 com 14, formando a corrente de 30 elos. Levará portanto $7 \times 5 = 35$ minutos. Para verificar que não é possível em menos tempo, basta observar que, abrindo 6 elos, restam pelo menos 8 pedaços formados por 1, 2 ou 3 elos fechados e que necessitam de pelos menos 7 elos abertos para serem ligados.

10. (D)

Observando como os números aparecem nos cantos, percebemos que aparecem



Como 2000 é múltiplo de 4, a resposta correta é:



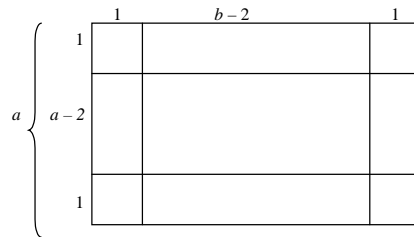
11. (A) Se $6 \text{ bananas} = \frac{1}{2} \text{ melancia}$ então $24 \text{ bananas} = 2 \text{ melancias} = 9 \text{ laranjas} + 6 \text{ bananas}$.

Portanto, $18 \text{ bananas} = 9 \text{ laranjas}$, ou seja, $2 \text{ bananas} = 1 \text{ laranja}$. Assim, $12 \text{ laranjas} + 12 \text{ bananas} = 24 \text{ bananas} + 12 \text{ bananas} = 36 \text{ bananas} = 3 \text{ melancias}$.

12. (D) A cada 10 inteiros consecutivos aparecem todos os algarismos 0, 1, 2, ..., 9 como último algarismo. Como sua soma é 45, que termina em 5, e $7 \times 5 = 35$, que também termina em 5, a soma de 70 números inteiros positivos consecutivos sempre termina em 5.

13. (B) 2 quilogramas de moedas de 20 centavos correspondem a $\frac{2000}{8} = 250$ moedas de 20 centavos, que valem o mesmo que 100 moedas de 50 centavos. Assim, 100 moedas de 50 centavos pesam 1 quilograma, logo cada moeda pesa 10 gramas.

14. (A)



Trace retas paralelas aos lados a uma distância 1. O perímetro é igual em valor numérico à soma das áreas dos quatro retângulos finos junto aos lados.

Como esta soma é igual à área total do retângulo vemos que a área do pequeno retângulo central é igual à soma das áreas dos quatro quadrados nos cantos. Assim $(a-2)(b-2) = 4$.

Como $a \neq b$ temos $a-2 = 4, b-2 = 1$ ou $a-2 = 1, b-2 = 4$.

15. (C) $453 \times 7 = 3171$

16. (D) Se cada linha tiver 5 casas ocupadas teremos 30 casas ocupadas, apenas. Logo, alguma linha tem 6 ou mais casas ocupadas.

17. (E) O número total de alunos da turma é menor que 30, é par, é maior que 15 e deixa resto 1 quando dividido por 5. Logo, é 26. Temos 11 meninos.

18. (A) Os números formados são da forma $a11, 1a1$ ou $11a$, onde a é um dos nove algarismos restantes. Para um dado a , a soma dos três números acima é $aaa + 222 = 111 \times (a+2)$. Logo, a sua soma para todos os nove valores possíveis de a é:

$$S = 111 [(0 + 2 + 3 + \dots + 9) + (9 \times 2)] = 111 \times (44 + 18) = 6882.$$

19. (D) Se A é cão, B é cão, C é lobo, D é cão, E é lobo, o que é absurdo, pois E diria que A é um lobo. Assim, A é lobo, B é lobo, C é cão, D é lobo e E é lobo, e portanto há quatro lobos no grupo de animais.

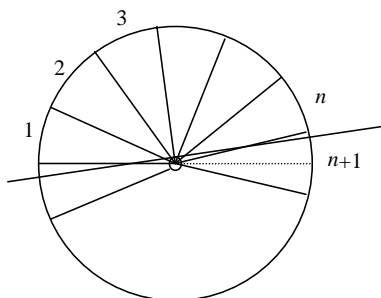
20. (A) No primeiro mosaico, temos $3 + 3 + 1 + 1 = 8$ azulejos pretos; no segundo, temos $4 + 4 + 2 + 2 = 12$; no terceiro, temos $5 + 5 + 3 + 3 = 16$; não é difícil perceber (e verificar) que os próximos mosaicos têm 20 e 24 azulejos pretos. Como $8 + 12 + 16 + 20 + 24 = 80$, é possível construir exatamente 5 mosaicos. Assim serão necessários $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = 1 + 4 + 9 + 16 + 25 = 55$ azulejos brancos.

NÍVEL 2 (7ª. e 8ª. séries)

1) B	6) B	11) B	16) B	21) B
2) E	7) A	12) D	17) E	22) D
3) D	8) D	13) C	18) A	23) A
4) C	9) Anulada	14) E	19) D	24) D
5) B	10) C	15) D	20) B	25) B

RESUMO DAS SOLUÇÕES

- (B) Veja a solução do problema 4 do nível 1.
- (E), logo $BC = DC$. Como $m(\widehat{BCD}) = 90^\circ$, temos $m(\widehat{DBC}) = m(\widehat{BDC}) = 45^\circ$. Mas $m(\widehat{BCA}) = m(\widehat{DCE}) = 80^\circ$. Portanto, $\alpha = 180^\circ - (45^\circ + 80^\circ) = 55^\circ$.
- Veja a solução do problema 5 do nível 1.
- Veja a solução do problema 6 do nível 1.
- Veja a solução do problema 8 do nível 1.
- Veja a solução do problema 9 do nível 1.
- Veja a solução do problema 11 do nível 1.
- Veja a solução do problema 12 do nível 1.
- Anulada
- Veja a solução do problema 15 do nível 1.
- (B) Seja x o número de arcos percorridos e y o número de voltas dadas.
 $P_1P_r = 35x = 360y \Rightarrow 7x = 72y \Rightarrow x = 72$. Logo, $n = 73$.
- Veja a solução do problema 16 do nível 1.
- (C) $A\widehat{BC} = B\widehat{CD} = \frac{180(5-2)}{5} = 108^\circ$.
 $A\widehat{BF} = 60^\circ, F\widehat{BC} = 48^\circ, B\widehat{CF} = \frac{180-48}{2} = 66^\circ$. Logo
 $F\widehat{CD} = 108^\circ - 66^\circ = 42^\circ$.
- Veja a solução do problema 17 do nível 1.
- (D) Uma reta determina o número máximo de regiões no círculo quando corta o número máximo de setores (ou seja, o maior número possível de raios). A figura mostra uma reta que corta $n+1$ raios, ou seja, $n+2$ setores, determinando assim $n+2$ novas regiões, para um total de $3n+3$ regiões. Este número é máximo, já que as extremidades dos raios extremos cortados por uma reta estão sempre em um mesmo semiplano determinado pela paralela à reta passando pelo centro do círculo.



16. (B) Paulo tem x reais e Cezar tem y reais

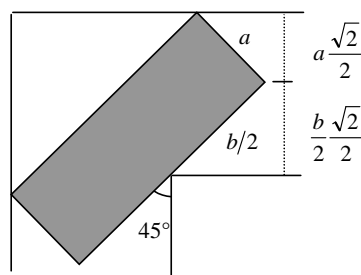
$$x - 5 + \frac{1}{3}(y + 5) = 18, \quad \frac{2}{3}(y + 5) = 18.$$

Logo, $x = 14$ e $y = 22$. $y - x = 8$.

17. (E) Tomemos como unidade a quantidade de ração que 1 vaca come em 1 dia.
 $10 \cdot 24 + 10 \cdot 30 + n \cdot 10 = 24 \cdot 60 \Rightarrow n = 90$.

18. Veja a solução do problema 18 do nível 1.

19. (D) A mesa pode ser empurrada pelo corredor de dois modos: utilizando apenas movimentos de translação ou girando-a em torno do ponto de encontro dos dois corredores. No primeiro caso, é preciso um corredor de largura igual à maior dimensão da mesa (ou seja b). No segundo caso, a posição crítica ocorre quando a mesa está igualmente inclinada em relação aos dois corredores (isto é, faz um ângulo de 45° com a horizontal). Neste caso, a largura mínima deve ser igual a $a \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{b}{2} \frac{\sqrt{2}}{2} = (2a + b) \frac{\sqrt{2}}{4}$. Como $2a < b$, este valor é menor que $b \frac{\sqrt{2}}{2}$ e, portanto, menor que b . Logo, a largura mínima do corredor deve ser igual a $(2a + b) \frac{\sqrt{2}}{4}$.



20. (B) O plano que secciona o cubo no item B é aquele que contém os segmentos que ligam os pontos médios de arestas paralelas não coincidentes de duas faces adjacentes. Pode-se verificar que as demais planificações não contém representações de interseções de planos com o cubo.

21. (B) Seja n^2 o quadrado perfeito. Como ele termina com 2001, temos $n^2 = 10000m + 2001 \Leftrightarrow n^2 - 1 = 2000(5m + 1) \Leftrightarrow (n - 1)(n + 1) = 2^4 5^3 (5m + 1)$. Como $\text{mdc}(n - 1; n + 1) = \text{mdc}(n + 1; n + 1 - (n - 1)) = \text{mdc}(n + 1, 2) = 2$ (pois n é ímpar), $n - 1$ ou $n + 1$ é divisível por $5^3 = 125$, assim $n = 125t + 1$ ou $n = 125t - 1$, onde t é inteiro positivo. Como n é ímpar, t é par, logo o menor valor possível para t é 2. Para $n = 125 \cdot 2 - 1 = 249$, temos $n^2 = 62001$, que termina em 2001. Logo o menor quadrado perfeito cujos últimos quatro dígitos são 2001 é $249^2 = 62001$ que tem 5 dígitos.

22. (D) Seja S a extensão do circuito, $t > 0$ o tempo gasto pelo Papa-Léguas para dar a primeira volta e $t' > 0$ o tempo gasto para dar as outras 99 voltas. Temos $\frac{S}{t} = 200$ e a velocidade média do Papa-

Léguas na corrida é $\frac{100S}{t + t'} = \frac{20000t}{t + t'} < 20000$. Por outro lado, como nada sabemos sobre o

valor de t' , se $t' < 9t$ teremos $\frac{100S}{t + t'} > 2000$. Assim a opção correta é D.

23. Veja a solução do problema 20 do nível 1.

24. Veja a solução do problema 19 do nível 1.

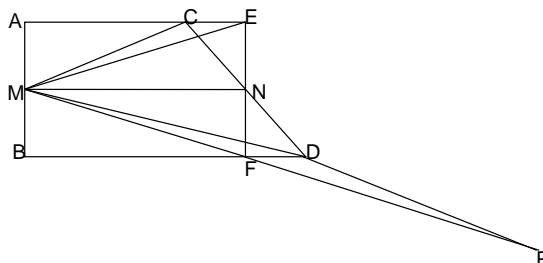
25. (B) Sejam M, N, O, P, Q e R os pontos de tangência dos lados AB, BC, CD, DE, EF e FA na circunferência inscrita, respectivamente, e seja $x = AM$. Temos $AR = AM = x$, $MB = 1 - x$, $BN = MB = 1 - x$, $NC = 2 - (1 - x) = 1 + x$, $CO = NC = 1 + x$, $OD = 3 - (1 + x) = 2 - x$, $DP = OD = 2 - x$, $PE = 4 - (2 - x) = 2 + x$, $EQ = PE = 2 + x$, $QF = 5 - (2 + x) = 3 - x$ e $FR = QF = 3 - x$. Logo $FA = FR + AR = 3 - x + x = 3$.

NÍVEL 3 (Ensino médio)

1) B	6) B	11) D	16) D	21) C
2) E	7) C	12) D	17) B	22) C
3) D	8) B	13) B	18) C	23) B
4) C	9) C	14) D	19) B	24) B
5) B	10) D	15) A	20) A	25) E

RESUMO DAS SOLUÇÕES

1. Veja a solução do problema 4 do nível 1.
2. Veja a solução do problema 2 do nível 2.
3. Veja a solução do problema 3 do nível 2.
4. Veja a solução do problema 4 do nível 2.
5. Veja a solução do problema 5 do nível 2.
6. Veja a solução do problema 9 do nível 1.
7. Veja a solução do problema 15 do nível 1.
8. Veja a solução do problema 11 do nível 2.
9. Veja a solução do problema 13 do nível 2.
10. Veja a solução do problema 15 do nível 2.
11. Veja a solução do problema 22 do nível 2.
12. (D) Observemos que a base da potência no lado esquerdo da igualdade é par. Como o expoente da potência é inteiro e positivo (é igual a $(x-1)^2 + 1$), temos que a base, em módulo, é menor ou igual a 4, sendo então igual a -2 , 2 ou 4 . Assim, a equação dada é equivalente a $(-6x^2 + 12x - 2 = -2$ e $x^2 - 2x + 2 = 2)$ ou $(-6x^2 + 12x - 2 = 2$ e $x^2 - 2x + 2 = 2)$ ou $(-6x^2 + 12x - 2 = 4$ e $x^2 - 2x + 2 = 1)$. Na primeira possibilidade, temos $x = 0$ ou $x = 2$; a segunda possibilidade não apresenta solução; a terceira possibilidade nos fornece $x = 1$. Assim, a equação admite três soluções inteiras distintas.
13. (B) O fato de que todos os alunos têm a mesma probabilidade de serem sorteados não é alterado pela perda da primeira bola sorteada. Assim, Pedro continua com uma probabilidade igual a $1/30$ de ser sorteado.
14. Veja a solução do problema 19 do nível 1.
15. Veja a solução do problema 18 do nível 1.
16. Veja a solução do problema 19 do nível 2.
17. Veja a solução do problema 20 do nível 2.
18. (C) Considere a equação $f(g(x)) = 2$. Temos $(g(x))^2 - 3g(x) + 4 = 2 \Leftrightarrow g(x) = 1$ ou $g(x) = 2$. Ao resolvermos $f(h(x)) = 1$, temos $(h(x))^2 - 3h(x) + 4 = 1$, que não tem solução. Assim, sendo $g(x) = f(f \dots (x))$ (com f aplicada 1999 vezes), temos que resolver $f(f(g(x))) = 2 \Leftrightarrow f(g(x)) = 1$ ou $f(g(x)) = 2$. Como $f(g(x)) = 1$ não tem solução, temos $g(x) = 1$ ou $g(x) = 2$. Repetindo esta idéia sucessivamente, obtemos $f(x) = 1$ ou $f(x) = 2 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 4 = 1$ ou $x^2 - 3x + 4 = 2 \Leftrightarrow x = 1$ ou $x = 2$. Assim a equação tem 2 soluções, a saber, 1 e 2.
19. Veja a solução do problema 21 do nível 2.
20. Considere a figura a seguir (na qual assumimos, sem perda de generalidade, que $AC < BD$).



Seja EF a paralela a AB por N . Temos que $m(\angle EMF) = \alpha$. Além disso, $m(\angle M\hat{E}A) = m(\angle M\hat{F}B) < 90^\circ$. Considere P sobre MF tal que $PF = ME$. Como $PF = ME$, $m(\angle D\hat{F}P) = m(\angle M\hat{F}B) = m(\angle M\hat{E}C)$ e $FD = CE$, pelo caso LAL temos que os triângulos MEC e PFD são congruentes. Logo $m(\angle F\hat{P}D) = m(\angle C\hat{M}E)$ e $PD = MC$. Como $MD^2 = BD^2 + MB^2 > AC^2 + MA^2 = MC^2$, temos $MD > MC \Leftrightarrow MD > PD \Leftrightarrow m(\angle M\hat{P}B) > m(\angle P\hat{M}D)$ (observe o triângulo MPD) $\Leftrightarrow m(\angle C\hat{M}E) > m(\angle F\hat{M}D)$.

Logo $\beta = m(\widehat{EMF}) - m(\widehat{FMD}) + m(\widehat{CME}) = \alpha + m(\widehat{CME}) - m(\widehat{FMD}) > \alpha$.

Outra solução:

Pela lei dos senos aplicada ao triângulo MCE , temos $\frac{CE}{\text{sen}(\widehat{CME})} = \frac{MC}{\text{sen}(\widehat{MEA})}$ (I)

Aplicando a lei dos senos agora ao triângulo MFD , temos

$$\frac{FD}{\text{sen}(\widehat{FMD})} = \frac{MD}{\text{sen}(\widehat{MFD})} = \frac{MD}{\text{sen}(\widehat{MFB})}$$
 (II)

De (I) e (II), temos

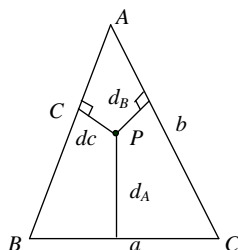
$$\frac{\text{sen}(\widehat{FMD})}{\text{sen}(\widehat{CME})} = \frac{MC}{MD}$$

Como $MC < MD$, temos $\text{sen}(\widehat{FMD}) < \text{sen}(\widehat{CME})$. Como estes ângulos são agudos, $m(\widehat{FMD}) < m(\widehat{CME})$. Logo $\beta = m(\widehat{EMF}) - m(\widehat{FMD}) + m(\widehat{CME}) = \alpha + m(\widehat{CME}) - m(\widehat{FMD}) > \alpha$.

21. (C) Seja $y = x^2 + x$. Temos $x^2 + x + 1 = 156/(x^2 + x) \Leftrightarrow y + 1 = 156/y \Leftrightarrow y^2 + y - 156 = 0 \Leftrightarrow y = 12$ ou $y = -13 \Leftrightarrow x^2 + x = 12$ ou $x^2 + x = -13 \Leftrightarrow x^2 + x - 12 = 0$ ou $x^2 + x + 13 = 0$. A segunda equação não tem solução, assim a soma das soluções reais da equação original é $-1/1 = -1$.

22. (C) Seja ABC um triângulo acutângulo, no qual supomos que a seja o menor lado. A soma das distâncias de um ponto P aos lados é $d_A + d_B + d_C = \frac{2S_A}{a} + \frac{2S_B}{b} + \frac{2S_C}{c}$, onde S_A, S_B e S_C são as áreas dos triângulos PBC, PAC e PAB , respectivamente. Como $S_A + S_B + S_C$ é constante, $d_A + d_B + d_C$ é máxima quando a única parcela não nula é relativa ao maior coeficiente 0, que é $\frac{2}{a}$.

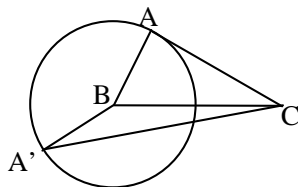
Logo, o máximo da soma ocorre quando P é o vértice oposto ao menor lado e é, portanto, igual à maior altura do triângulo.



23. (B) Temos $a_1 = 2002, a_2 = 2003, \dots, a_9 = 2010, a_{10} = 201, a_{11} = 202, \dots, a_{19} = 210, a_{20} = 21, a_{21} = 22, \dots, a_{29} = 30, a_{30} = 3, a_{31} = 4, \dots, a_{37} = 10$ e finalmente $a_{38} = 1$.

24. Veja a solução do problema 25 do nível 2.

25. (E) Considere que os pontos B e C estão fixos e que A gira em torno de B . Assim, A está na circunferência com centro B e raio 5.



Temos que o ângulo \widehat{C} é máximo quando AC tangencia a circunferência. Neste caso, temos que o ângulo \widehat{A} é reto. Logo, pelo teorema de Pitágoras, $AC^2 = BC^2 - AB^2 = 6^2 - 5^2 = 11 \Leftrightarrow AC = \sqrt{11}$. Assim, a área do triângulo ABC é $AB \cdot AC/2 = 5\sqrt{11}/2$.