XXIV OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA
Primeira Fase – Nível 2

1ª. Fase Olimpíada Regional
BA – ES – MG – PA – PB – RJ – RS – SC

8 de junho de 2002

- ***A duração da prova é de 3 horas.***
- ***Não é permitido o uso de calculadoras nem consultas a notas ou livros.***
- ***Você pode solicitar papel para rascunho.***
- ***Entregue apenas a folha de respostas.***

1. Um comerciante comprou dois carros por um total de R$ 27.000,00. Vendeu o primeiro com lucro de 10% e o segundo com prejuízo de 5%. No total ganhou R$ 750,00. Os preços de compra foram, respectivamente,
A) R$ 10.000,00 e R$ 17.000,00
B) R$ 13.000,00 e R$ 14.000,00
C) R$ 14.000,00 e R$ 13.000,00
D) R$ 15.000,00 e R$ 12.000,00
E) R$ 18.000,00 e R$ 9.000,00

2. Se você tiver uma mesa de bilhar retangular cuja razão entre a largura e o comprimento seja 5/7 e bater uma bola que está em um canto, de modo que ela saia na direção da bissetriz do ângulo desse canto, quantas vezes ela baterá nos lados antes de bater em um dos cantos?
A) 10 vezes **B)** 12 vezes **C)** 13 vezes **D)** 14 vezes **E)** 15 vezes

3. Dizer que uma tela de televisão tem 20 polegadas significa que a diagonal da tela mede 20 polegadas. Quantas telas de televisão de 20 polegadas cabem numa de 60 polegadas?
A) 9 **B)** 10 **C)** 18 **D)** 20 **E)** 30

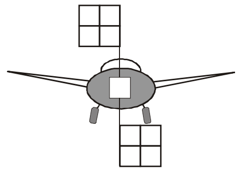
4. Uma usina comprou 2000 litros de leite puro e então retirou certo volume V de leite para produção de iogurte e substituiu este volume por água. Em seguida, retirou novamente o mesmo volume V da mistura e substituiu novamente este volume por água. Na mistura final existem 1 125 litros de leite puro. O volume V é:
A) 500 litros **B)** 600 litros **C)** 700 litros **D)** 800 litros **E)** 875 litros

5. Dois irmãos, Pedro e João, decidiram brincar de pega-pega. Como Pedro é mais velho, enquanto João dá 6 passos, Pedro dá apenas 5. No entanto, 2 passos de Pedro equivalem à distância que João percorre com 3 passos. Para começar a brincadeira, João dá 60 passos antes de Pedro começar a persegui-lo. Depois de quantos passos Pedro alcança João?
A) 90 passos **B)** 120 passos **C)** 150 passos **D)** 180 passos **E)** 200 passos

6. A diferença entre os quadrados de dois números inteiros consecutivos é sempre:
A) um número primo.
B) um múltiplo de 3.
C) igual à soma desses números.
D) um número par.
E) um quadrado perfeito.

7. Marcelo leva exatamente vinte minutos para ir de sua casa até a escola. Uma certa vez, durante o caminho, percebeu que esquecera em casa a revista Eureka! que ia mostrar para a classe; ele sabia que se continuasse a andar, chegaria à escola 8 minutos antes do sinal, mas se voltasse para pegar a revista, no mesmo passo, chegaria atrasado 10 minutos. Que fração do caminho já tinha percorrido neste ponto?
A) $\frac{2}{5}$ **B)** $\frac{9}{20}$ **C)** $\frac{1}{2}$ **D)** $\frac{2}{3}$ **E)** $\frac{9}{10}$

8. Escreva os números inteiros de 1 a 9 nos nove quadradinhos, de forma que as somas dos quatro números em cada uma das pás da “hélice” sejam iguais e de maior valor possível. Esse valor é:

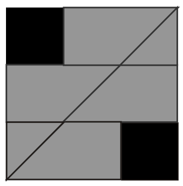


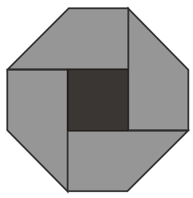
A) 23 **B)** 22 **C)** 21 **D)** 20 **E)** 19

9. Patrícia mora em São Paulo e quer visitar o Rio de Janeiro num feriado prolongado. A viagem de ida e volta, de ônibus, custa R$80,00, mas Patrícia está querendo ir com seu carro, que faz, em média, 12 quilômetros com um litro de gasolina. O litro de gasolina custa, em média, R$1,60 e Patrícia calcula que terá de rodar cerca de 900 quilômetros com seu carro e pagar 48 reais de pedágio. Ela irá de carro e para reduzir suas despesas, chama duas amigas, que irão repartir com ela todos os gastos. Dessa forma, não levando em conta o desgaste do carro e outras despesas inesperadas Patrícia irá:

A) economizar R$20,00.
B) gastar apenas R$2,00 a mais.
C) economizar R$24,00.
D) gastar o mesmo que se fosse de ônibus.
E) gastar R$14,00 a mais.

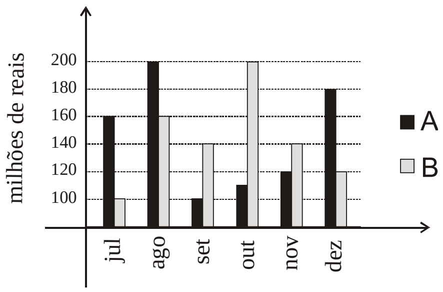
10. Traçando segmentos, podemos dividir um quadrado em dois quadradinhos congruentes, quatro trapézios congruentes e dois triângulos congruentes, conforme indica o desenho abaixo, à esquerda. Eliminando algumas dessas partes, podemos montar o octógono representado à direita. Que fração da área do quadrado foi eliminada?





A) $\frac{1}{9}$ **B)** $\frac{2}{9}$ **C)** $\frac{1}{4}$ **D)** $\frac{1}{3}$ **E)** $\frac{3}{8}$

11. O gráfico abaixo mostra o *faturamento mensal* das empresas A e B no segundo semestre de 2001.



Com base nesse gráfico, podemos afirmar que:

A) houve um mês em que o faturamento da empresa A foi o dobro do faturamento da empresa B.
B) no mês de julho, a diferença de faturamentos foi maior que nos demais meses.
C) a empresa B foi a que sofreu a maior queda de faturamento entre dois meses consecutivos.
D) no semestre, o faturamento total de A foi maior que o de B.
E) a diferença entre os faturamentos totais no semestre excedeu os 20 milhões de reais.

12. O produto de um milhão de números naturais é igual a um milhão. Qual é o maior valor possível para a soma desses números?

A) 1 000 000 **B)** 1 250 002 **C)**1 501 999 **D)** 1 999 999 **E)** 13 999 432

13. O lava-rápido "Lave Bem" faz uma promoção:

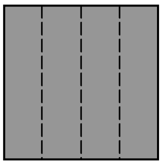
Lavagem simples R$5,00

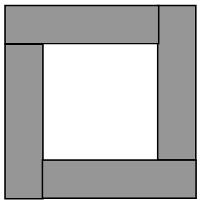
Lavagem completa R$7,00

No dia da promoção, o faturamento do lava-rápido foi de R$176,00. Nesse dia, qual o menor número possível de clientes que foram atendidos?

A) 23 **B)** 24 **C)** 26 **D)** 28 **E)** 30

14. Um quadrado de área 1 foi dividido em 4 retângulos congruentes, conforme indicado no desenho à esquerda. Em seguida, os quatro retângulos foram reagrupados de maneira a formar um quadrado, com um buraco quadrado no centro, conforme indica o desenho à direita.





A área do buraco é igual a:

A) $\frac{1}{2}$ **B)** $\frac{9}{16}$ **C)** $\frac{16}{25}$ **D)** $\frac{3}{4}$ **E)** 1

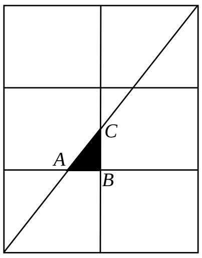
15. Quantos números inteiros positivos menores que 900 são múltiplos de 7 e terminam em 7?

A) 10 **B)** 11 **C)** 12 **D)** 13 **E)** 14

16. Dado um triângulo *ABC* onde $\hat{A} = 80°$ e $\hat{C} = 40°$, a medida do ângulo agudo formado pelas bissetrizes dos ângulos $\hat{A}$ e $\hat{B}$ é:

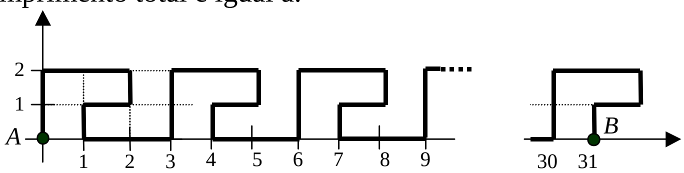
A) 40° **B)** 60° **C)** 70° **D)** 80° **E)** 110°

17. Na malha quadrada abaixo, há 6 quadrados de lado 30 cm. A área do triângulo *ABC* é:



A) 150 cm^2 **B)** 100 cm^2 **C)** 75 cm^2 **D)** 50 cm^2 **E)** 25 cm^2

18. A linha poligonal AB é desenhada mantendo-se sempre o mesmo padrão mostrado na figura. Seu comprimento total é igual a:



A) 31 **B)** 88 **C)** 90 **D)** 97 **E)** 105

19. Escrevendo todos os números inteiros de 100 a 999 quantas vezes escrevemos o algarismo 5?

A) 250 **B)** 270 **C)** 271 **D)** 280 **E)** 292

20. Se $xy = 2$ e $x^2 + y^2 = 5$, então $\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} + 2$ vale:

A) $\frac{5}{2}$ **B)** $\frac{25}{4}$ **C)** $\frac{5}{4}$ **D)** $\frac{1}{2}$ **E)** 1

21. Uma escola vai organizar um passeio ao zoológico. Há duas opções de transporte. A primeira opção é alugar "vans": cada van pode levar até 6 crianças e seu aluguel custa R$60,00. A segunda opção é contratar uma empresa para fazer o serviço: a empresa utiliza ônibus com capacidade para 48 crianças e cobra R$237,00 mais R$120,00 por ônibus utilizado. A escola deve preferir a empresa que utiliza ônibus se forem ao passeio pelo menos N crianças. O valor de N é:

A) 28 **B)** 31 **C)** 32 **D)** 33 **E)** 36

22. Durante sua viagem ao país das Maravilhas a altura de Alice sofreu quatro mudanças sucessivas da seguinte forma: primeiro ela tomou um gole de um líquido que estava numa garrafa em cujo rótulo se lia: "beba-me e fique 25% mais alta". A seguir, comeu um pedaço de uma torta onde estava escrito: "prove-me e fique 10% mais baixa"; logo após tomou um gole do líquido de outra garrafa cujo rótulo estampava a mensagem: "beba-me e fique 10% mais alta". Finalmente, comeu um pedaço de outra torta na qual estava escrito:"prove-me e fique 20% mais baixa". Após a viagem de Alice, podemos afirmar que ela:

A) ficou 1% mais baixa
B) ficou 1% mais alta
C) ficou 5% mais baixa
D) ficou 5% mais alta
E) ficou 10% mais alta

23. Vamos provar que 4 é maior que 4.
Sejam a e b dois números tais que $a > 4$ e $a = b$.

1) Vamos subtrair 4 dos dois termos desta equação:

$$a = b$$
$$a - 4 = b - 4$$

2) Colocamos –1 em evidência no segundo membro da equação:

$$a - 4 = -1\,(-b + 4)$$
$$a - 4 = -1\,(4 - b)$$

3) Elevamos ambos os termos da equação ao quadrado:

$$(a-4)^2 = [-1 \cdot (4-b)]^2$$
$$(a-4)^2 = (-1)^2 (4-b)^2$$
$$(a-4)^2 = 1 \cdot (4-b)^2 \quad (a-4)^2 = (4-b)^2$$

4) Extraímos a raiz quadrada dos dois membros da equação:

$$\sqrt{(a-4)^2} = \sqrt{(4-b)^2}$$
$$a - 4 = 4 - b$$

5) Como $a = b$, substituímos b por a

$$a - 4 = 4 - a$$

6) Resolvemos a equação:

$$a - 4 = 4 - a$$
$$2a = 8$$
$$a = 4$$

Como escolhemos a tal que $a > 4$, chegamos à inacreditável conclusão de que $4 > 4$.
Onde está o erro no argumento acima?

A) Na passagem 2. **B)** Na passagem 3. **C)** Na passagem 4.
D) Na passagem 5. **E)** Na passagem 6.

24. Qual é a quantidade total de letras de todas as respostas incorretas desta questão?

A) Quarenta e oito. **B)** Quarenta e nove. **C)** Cinqüenta.
D) Cinqüenta e um. **E)** Cinqüenta e quatro.

25. O resto da divisão por 9 de $\sqrt{1111111111 - 22222}$ é:

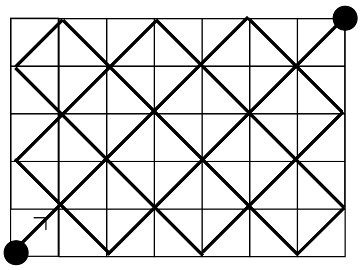
A) 0 **B)** 1 **C)** 3 **D)** 6 **E)** 8

GABARITO NÍVEL 2

1- C)	**6- C)**	**11- D)**	**16- C)**	**21- B)**
2- A)	**7- B)**	**12- D)**	**17- C)**	**22- A)**
3- A)	**8- B)**	**13- C)**	**18- D)**	**23- C)**
4- A)	**9- C)**	**14- B)**	**19- D)**	**24- D)**
5- E)	**10- B)**	**15- D)**	**20- B)**	**25- D)**

1. Sejam 27000 – x e x os preços de compra do primeiro e do segundo carros, respectivamente. Temos 1,1 (27000 – x) + 0,95x = 27000 + 750 $\Leftrightarrow$ 0,15x = 1950 $\Leftrightarrow$ x = 13000 $\Leftrightarrow$ 27000 – x = 14000 **(opção C)**.

2. Ao dividirmos a mesa em um tabuleiro 5 × 7, temos a seguinte figura, com a trajetória da bola:



Observando a figura, nota-se que a bola bate na tabela 10 vezes antes de bater novamente em um canto.
Observação: pode-se demonstrar que a razão entre a largura e o comprimento é a fração irredutível a/b, a bola bate na tabela $a + b – 2$ vezes nas tabelas antes de bater novamente em um canto. A idéia para obter esse resultado é construir um quadrado de lado ab com retângulos $a \times b$ e contar o número de vezes que a diagonal do quadrado corta os lados dos retângulos. **(opção A).**

3. As telas são retângulos semelhantes e a razão de semelhança é $\frac{20}{60} = \frac{1}{3}$. Logo a razão entre as áreas é $\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$. Portanto cabem 9 telas de 20 polegadas em uma de 60 polegadas. **(opção A)**.

4. Seja W = 2000 – V. Assim, após a primeira substituição, há um certo volume W de leite e V de água. Na segunda substituição, retira-se um volume $\frac{W}{W+V} \cdot V = \frac{WV}{2000}$ de leite. Assim, $W - \frac{WV}{2000} = 1125 \Leftrightarrow \frac{W(2000-V)}{2000} = 1125 \Leftrightarrow \frac{W^2}{2000} = 1125$, e deste modo obtemos W = 1500 litros e V = 500 litros. **(opção A).**

5. Os 60 passos que João tem de vantagem equivalem a $\frac{2}{3} \times 60 = 40$ passos de Pedro. Quando João dá 6 passos, percorre uma distância equivalente a 4 passos de Pedro. Assim, a cada 5 passos, Pedro aproxima-se de João o equivalente a 1 passo, alcançando-o após 40 × 5 = 200 passos. **(opção E).**

6. Dois inteiros consecutivos positivos podem ser representados por n e $n+1$, sendo $n \geq 1$ e a diferença entre seus quadrados é igual a $(n+1)^2 - n^2 = n^2 + 2n + 1 - n^2 = 2n + 1 = (n+1) + n$, resultado igual à soma desses números. **(opção C).**

7. O tempo necessário para retornar à casa e depois fazer todo o percurso até a escola foi de 18 minutos (pois ia chegar 8 minutos adiantado mas acabou chegando 10 minutos atrasado), tempo correspondente à distância a mais que percorreu, exatamente o dobro da distância entre o ponto de retorno e sua casa. Portanto, levou 9 minutos para ir de sua casa até o ponto de retorno, o que corresponde a $\frac{9}{20}$ da distância de sua casa até a escola. **(opção B).**

8. A soma dos números de 1 a 9 é 45. Ao colocar 1 no meio, podemos escrever numa das "pás" 22 = 9 + 6 + 5 + 2 e na outra 22 = 8 + 7 + 4 + 3. Essa não é a única possibilidade, mas isso não muda o fato de que a maior soma possível em cada pá é igual a 22. **(opção B).**

9. O custo de combustível é $\frac{900}{12}\times 1{,}60 = 120$ reais; com o pedágio, o custo da viagem é 120 + 48 = 168 reais. Cada um dos três viajantes irá pagar $\frac{168}{3} = 56$ reais. Nesse caso, Patrícia irá economizar 80 – 56 = 24 reais. **(opção C).**

10. Como os quadrados, trapézios e triângulos são congruentes entre si, devemos ter o lado do quadrado igual à altura do trapézio, igual a cada cateto do triângulo, igual à terça parte do lado do quadrado maior. Foram eliminados dois triângulos e um quadrado, cuja soma das áreas equivale à área de dois quadrados de lado igual à terça parte do original, ou seja, $2\times\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{2}{9}$, da área do quadrado original. **(opção B).**

11. - A alternativa A é falsa, pois analisando o gráfico fica claro que em nenhum dos meses o faturamento de A é o dobro do faturamento de B;
- A alternativa B é falsa, pois em outubro a diferença de faturamento entre as duas empresas foi mais de 80 milhões, maior do que a diferença em julho, que foi de 60 milhões;
- A alternativa C é falsa, pois foi a empresa A que teve a maior queda de faturamento entre dois meses consecutivos (100 milhões entre os meses de agosto e setembro);
- A alternativa D é correta, pois no semestre o faturamento de B foi de 860 milhões e o faturamento de A foi maior que 860 milhões e menor que 880 milhões;
- A alternativa E é falsa, pois a diferença de faturamento no semestre foi menor que 20 milhões. **(opção D).**

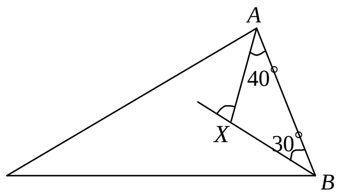
12. Supondo que haja dois números *a* e *b* maiores do que 1, entre os fatores do produto, podemos sempre substituir esses fatores por *ab* e 1, já que $ab + 1 > a + b$ (ao fazer isso, estamos aumentando o valor da soma).
Dessa forma, chegamos ao produto $1\cdot 1\cdot 1\cdot \ldots \cdot 1\cdot 1000000$, com 999999 fatores iguais a 1 e um fator igual a 1000000, cuja soma desses fatores é 1999999. **(opção D).**

13. Como a lavagem completa é mais cara, o menor número de clientes ocorre quando o número *c* de lavagens completas for máximo. Como $176 = 7 \times 25 + 1$, então $c \le 25$. Além disso, $176 - 7c$ deve ser múltiplo de 5, e portanto *c* deve terminar em 3 ou em 8. Logo o valor máximo de *c* é 23, em cujo caso o número de lavagens simples é $\frac{176 - 23\times 7}{5} = 3.$ O menor número possível de clientes é 23 + 3 = 26. **(opção C)**.

14. Cada retângulo tem comprimento 1 e largura $\frac{1}{4}$; portanto, o buraco quadrado tem lado de medida igual a $1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ e sua área é $\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}$. **(opção B).**

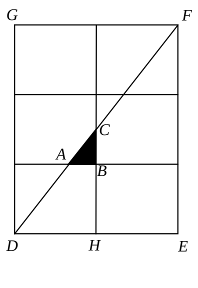
15. Um número inteiro positivo menor que 900 e que termina em 7 é da forma $10x + 7$, onde *x* é um inteiro e $0 \le x \le 89$. Além disso, $10x + 7$ é múltiplo de 7 se, e somente se, $10x$ é múltiplo de 7, e como $mdc(10,7) = 1$, isto equivale a dizer que *x* é múltiplo de 7. Como há 13 múltiplos de 7 de 0 a 89 (0, 7, 14,…, 12 × 7 = 84), há 13 inteiros positivos menores que 900, múltiplos de 7 e que terminam em 7. **(opção D)**.

16. $\hat{B} = 180° - \hat{A} - \hat{C} = 180° - 80° - 40° = 60°.$



Seja *X* o ponto de encontro entre as bissetrizes de $\hat{A}$ e $\hat{B}$. O ângulo pedido é ângulo externo do triângulo *XAB*, logo vale $X\hat{A}B + X\hat{B}A = 30° + 40° = 70°.$ **(opção C).**

17.



$$\Delta DHC \sim \Delta DEF \Rightarrow \frac{HC}{EF} = \frac{DH}{DE} = \frac{1}{2} \Rightarrow HC = 45cm$$
$$\Rightarrow BC = 15cm.$$
$$\Delta ABC \sim \Delta DEF \Rightarrow \frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF} = \frac{2}{3} \Rightarrow AB = 10cm$$

Logo área $ABC = \frac{10\times 15}{2} = 75cm^2$ **(opção C).**

18. A linha é composta da repetição da figura ao lado, cujo comprimento é 9. Cada figura dessa inicia-se num ponto representado por um múltiplo de 3 no eixo horizontal: 0, 3, 6, ..., 30. A 11ª figura, incompleta, tem comprimento 7. Portanto, o comprimento da linha poligonal é igual a $10 \times 9 + 7 = 97$. **(opção D).**

19. Nas unidades, do 105 ao 995, o algarismo 5 aparece 90 vezes, nas dezenas, do 150 ao 259, do 250 ao 259, ..., do 950 ao 959, o algarismo 5 aparece 90 vezes e finalmente, nas centenas, do 500 ao 599, o algarismo 5 aparece 100 vezes, totalizando assim 90 + 90 + 100 = 280 vezes. **(opção D).**

20. $\dfrac{x^2}{y^2} + \dfrac{y^2}{x^2} + 2 = \dfrac{x^4 + y^4 + 2x^2y^2}{x^2y^2} = \dfrac{\left(x^2 + y^2\right)^2}{(xy)^2} = \dfrac{25}{4}$ **(opção B).**

21. Observemos que um ônibus tem a mesma capacidade que 48/6 = 8 "vans". Para colocar crianças que caberiam em k + 1 ônibus, precisaríamos de pelo menos 8k "vans". O gasto com ônibus seria 237 + 120(k + 1) = 120k + 357 e o gasto com "vans" seria pelo menos 60 · 8k = 480k, que é maior que o preço do ônibus para k maior ou igual a 1, isto é, quando precisarmos de 2 ou mais ônibus.
Se utilizarmos um ônibus, pagaremos 237 + 120 = 357 reais para levar até 48 crianças. Como 357 reais são suficientes para pagarmos 5 "vans", mas não 6, temos que é mais vantajoso utilizar ônibus se forem necessárias pelo menos 6 "vans", o que acontece quando levamos pelo menos 5 · 6 + 1 = 31 crianças. Logo N = 31. **(opção B).**

22. Sendo h a altura inicial de Alice, sua altura final será 1,25 × 0,9 × 1,1 × 0,8 h = 0,99h. Ou seja, ela ficou 1% mais baixa. **(opção A)**.

23. Como $a > 4$ e $a = b$, $b > 4$. Logo $4 - b < 0$. Assim, na passagem 4), o correto seria

$$\sqrt{(a-4)^2} = \sqrt{(4-b)^2}$$
$$|a-4| = |4-b|$$
$$a - 4 = b - 4$$

(opção C).

24. O total de letras nas cinco respostas é 63, sendo 13 nas respostas das alternativas A e B, 9 na resposta da alternativa C, 12 na resposta da alternativa D e 16 na resposta da alternativa E. Como 63 – 13 = 50, 63 – 9 = 54, 63 – 12 = 51 e 63 – 16 = 47, a única alternativa correta é a D. **(opção D).**

25. $\sqrt{1111111111 - 22222} = \sqrt{\dfrac{10^{10} - 1}{9} - \dfrac{2 \times (10^5 - 1)}{9}} = \sqrt{\dfrac{10^{10} - 2 \times 10^5 + 1}{9}} = \dfrac{10^5 - 1}{3} = 33333.$

Para calcular o resto da divisão por 9, basta somar os algarismos: 3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 15, 1 + 5 = 6. O resto é 6. **(opção D)**.