

XXIV OLIMPIÁDA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA
Segunda Fase – Nível 3 (Ensino Médio)

PROBLEMA 1

O primeiro número de uma seqüência é 7. O próximo é obtido da seguinte maneira: Calculamos o quadrado do número anterior ($7^2 = 49$) e a seguir efetuamos a soma de seus algarismos e adicionamos 1, isto é, o segundo número é $4 + 9 + 1 = 14$. Repetimos este processo, e de $14^2 = 196$, temos que o terceiro número da seqüência é $1 + 9 + 6 + 1 = 17$, e assim sucessivamente. Qual o 2002º elemento desta seqüência?

PROBLEMA 2

Para quais inteiros positivos n existe um polígono não regular de n lados, inscrito em uma circunferência, e com todos os ângulos internos de mesma medida?

PROBLEMA 3

Determine o maior natural k para o qual existe um inteiro n tal que 3^k divide $n^3 - 3n^2 + 22$.

PROBLEMA 4

Quantos dados devem ser lançados ao mesmo tempo para maximizar a probabilidade de se obter exatamente um 2?

PROBLEMA 5

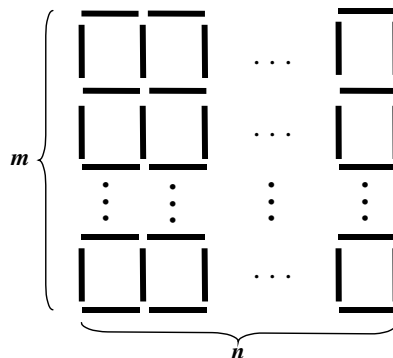
Em um quadrilátero convexo $ABCD$, os lados opostos AD e BC são congruentes e os pontos médios das diagonais AC e BD são distintos.

Prove que a reta determinada pelos pontos médios das diagonais forma ângulos iguais com AD e BC .

PROBLEMA 6

Colocamos vários palitos sobre uma mesa de modo a formar um retângulo $m \times n$, como mostra a figura.

Devemos pintar cada palito de azul, vermelho ou preto de modo que cada um dos quadradinhos da figura seja delimitado por exatamente dois palitos de uma cor e dois de outra cor. De quantas formas podemos realizar esta pintura?



Soluções Nível 3 – Segunda Fase

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 1

Os primeiros números da seqüência são (7, 14, 17, 20, 5, 8, 11, 5...) donde vemos que exceto pelos 4 primeiros termos, a seqüência é periódica com período 3. Como 2002 deixa resto 1 quando dividido por 3 o número procurado coincide com aquele que ocupa o 7º. lugar na seqüência, a saber, 11.

Observação:

Para qualquer termo inicial, a seqüência construída de acordo com método descrito no enunciado do problema será eventualmente periódica, (isto é teremos $a_{n+k} = a_k$ para todo $k \geq m$, par certos valores de m e n).

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 2

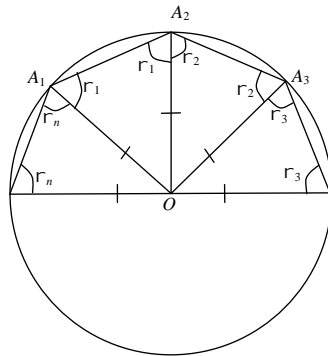
Seja C a circunferência de centro O circunscrita ao polígono $A_1A_2...A_n$. Os triângulos $A_iA_{i+1}O$ (com $A_{n+1} = A_1$) são isósceles. Seja $\Gamma_i = \widehat{OA_iA_{i+1}}$.

Então

$$(1) \Gamma_1 + \Gamma_2 = \Gamma_2 + \Gamma_3 = \Gamma_3 + \Gamma_4 = \dots = \Gamma_n + \Gamma_1.$$

Portanto,

$$\begin{cases} \Gamma_1 = \Gamma_3 = \Gamma_5 = \dots, \\ \Gamma_2 = \Gamma_4 = \Gamma_6 = \dots \\ \Gamma_n = \Gamma_2 \end{cases}$$



Se n for ímpar, então $\Gamma_1 = \Gamma_2 = \dots = \Gamma_n$, logo todos os ângulos $A_i\widehat{OA_{i+1}}$ serão iguais e o polígono será regular. Para n par, não é necessário que todos os ângulos sejam iguais.

Escolhendo $x \neq y$ de modo que $x + y = \widehat{\text{ângulo interno}} = \frac{180(n-2)}{n}$ e fazendo $x = \Gamma_1 = \Gamma_3 = \dots = \Gamma_{n-1}$,

$y = \Gamma_2 = \Gamma_4 = \dots = \Gamma_n$, obtemos um polígono inscritível não regular com todos os ângulos de mesma medida. Portanto, para n par ≥ 4 , existe um polígono de n lados satisfazendo as condições do problema.

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 3

Se $n = 3r$, então $n^3 - 3n^2 + 22 = (3r)^3 - 3 \cdot (3r)^2 + 22$ é a soma de um múltiplo de 3 com 22, logo não é múltiplo de 3.

Se $n = 3r + 1$, então

$$n^3 - 3n^2 + 22 = (3r+1)^3 - 3(3r+1)^2 + 22 = (3r)^3 + 3 \cdot (3r)^2 + 3 \cdot (3r) + 1 - 3 \cdot 2 \cdot (3r) - 3 + 22 = (3r)^3 - 3 \cdot (3r) + 20,$$

que também não é múltiplo de 3.

$$\text{Finalmente, se } n = 3r - 1, \text{ então } n^3 - 3n^2 + 22 = (3r-1)^3 - 3(3r-1)^2 + 22 =$$

$$= (3r)^3 - 3 \cdot (3r)^2 + 3 \cdot (3r) - 1 - 3 \cdot (3r)^2 + 3 \cdot 2 \cdot (3r) - 3 + 22 = (3r)^3 - 6 \cdot (3r)^2 + 9 \cdot 3r + 18, \text{ que}$$

é a soma de um múltiplo de 27 com 18, e portanto é múltiplo de 9 mas não de 27, logo a maior potência de 3 que divide um número da forma $n^3 - 3n^2 + 22$ é $3^2 = 9$. Assim, k é no máximo 2.

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 4

Suponha que os dados estão numerados de 1 a n . A probabilidade de que somente o dado N° . 1 resulte em 2 é:

$$\frac{1}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} \times \dots \times \frac{5}{6} = \frac{5^{n-1}}{6^n}.$$

Analogamente, a probabilidade de que somente o dado k , ($1 \leq k \leq n$) resulte em 2 é

$$\frac{5}{6} \times \frac{5}{6} \times \dots \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} \times \dots \times \frac{5}{6} = \frac{5^{n-1}}{6^n}.$$

Portanto, a probabilidade de obter exatamente um 2 é

$$P_n = \frac{5^{n-1}}{6^n} + \frac{5^{n-1}}{6^n} + \dots + \frac{5^{n-1}}{6^n} = n \cdot \frac{5^{n-1}}{6^n}.$$

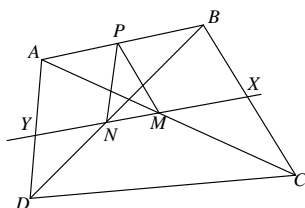
Agora observe que $P_n \geq P_{n+1} \Leftrightarrow n \cdot \frac{5^{n-1}}{6^n} \geq (n+1) \cdot \frac{5^n}{6^{n+1}} \Leftrightarrow 6n \geq 5(n+1) \Leftrightarrow n \geq 5$.

Para $n = 5$, ocorre a igualdade ($P_5 = P_6$), $P_5 = P_6 > P_7 > P_8 > P_9 > \dots$ e $P_1 < P_2 < P_3 < P_4 = P_5 = P_6$.
E a probabilidade é máxima para $n = 5$ ou $n = 6$.

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 5

Sejam M e N os pontos médios de AC e BD e P o ponto médio do lado AB . Então PM é base média do $\triangle ABC$ e PN base média do $\triangle ABD$. Segue que $PM = \frac{BC}{2} = \frac{AD}{2} = PN$.

Sendo X e Y as interseções da reta MN com BC e AD , temos então $B\hat{X}M = P\hat{M}N = P\hat{N}M = A\hat{Y}N$ ou $B\hat{X}M = f - P\hat{M}N = f - P\hat{N}M = A\hat{Y}N$.



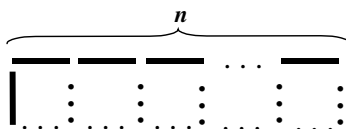
SOLUÇÃO ALTERNATIVA:

Provaremos que se, $M = \frac{A+C}{2}$ e $N = \frac{B+D}{2}$ então o vetor \overrightarrow{MN} faz ângulos iguais com \overrightarrow{AD} e \overrightarrow{BC} . Para isso, como $|\overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{BC}|$, basta ver que os produtos internos $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{AD}$ e $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{BC}$ têm o mesmo módulo.

$$\begin{aligned} \text{Temos } \overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{AD} &= (N - M) \cdot (D - A) = \left(\frac{B+D}{2} - \frac{A+C}{2} \right) \cdot (D - A) = \frac{(C-B) \cdot (D-A) - |D-A|^2}{2} = \\ &= \frac{(C-B) \cdot (D-A) - |C-B|^2}{2} = \frac{(D+B-A-C) \cdot (C-B)}{2} = (M-N) \cdot (C-B) = -\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{BC} \end{aligned}$$

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 6

Há 3^n maneiras de colorir a fileira horizontal superior de palitos. O palito vertical mais à esquerda da primeira linha também pode ser colorido de 3 maneiras.



Uma vez definidas as cores dos palitos superior e mais à esquerda de um quadradinho, há duas maneiras de completá-lo segundo as condições do enunciado: se ambos têm mesma cor, há duas escolhas para a cor dos dois palitos restantes; se ambos têm cores diferentes, há duas maneiras de colorir os dois palitos restantes com estas cores.

Assim, para completar a primeira linha de quadrados há $3^n \cdot 3 \cdot 2^n$ maneiras

Da mesma forma, a cor do palito vertical mais à esquerda da segunda linha de quadrados pode ser escolhido de 3 maneiras, e há 2^n maneiras de colorir os demais palitos desta linha. Assim, para $m = 2$, há $3^n \cdot 3 \cdot 2^n \cdot 3 \cdot 2^n$ colorações possíveis.

Analogamente, no caso geral, há $3^n \cdot (3 \cdot 2^n)^m = 3^{n+m} \cdot 2^{nm}$ maneiras de realizar a pintura pedida.