

XXIV OLIMPIÁDA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA
TERCEIRA FASE – NÍVEL 3 (Ensino Médio)

PROBLEMA 1:

Mostre que existe um conjunto A formado por inteiros positivos tendo as seguintes propriedades:

- A tem 2002 elementos.
- A soma de qualquer quantidade de elementos distintos de A (pelo menos um) nunca é uma potência perfeita.

Obs: Uma potência perfeita é um número da forma a^b , onde a e b são inteiros positivos e $b \geq 2$.

PROBLEMA 2:

$ABCD$ é um quadrilátero convexo e inscrito e M é um ponto sobre o lado CD , tal que o triângulo ADM e o quadrilátero $ABCM$ têm a mesma área e o mesmo perímetro. Prove que $ABCD$ tem dois lados de comprimentos iguais.

PROBLEMA 3:

Numeramos as casas de um tabuleiro quadriculado $m \times n$, onde $m, n \geq 2$, com os inteiros $1, 2, 3, \dots, mn$ de modo que, para todo $i \leq mn - 1$, as casas i e $i + 1$ tenham um lado em comum. Prove que existe $i \leq mn - 3$ tal que as casas i e $i + 3$ têm um lado em comum.

PROBLEMA 4:

Definimos o diâmetro de um subconjunto não vazio de $\{1, 2, \dots, n\}$ como a diferença entre seu maior elemento e seu menor elemento (em módulo).

Calcule a soma dos diâmetros de todos os subconjuntos não vazios de $\{1, 2, \dots, n\}$.

PROBLEMA 5:

Temos um número finito de quadrados, de área total 4. Prove que é possível arranjá-los de modo a cobrir um quadrado de lado 1.

Obs: É permitido sobrepor quadrados e parte deles pode ultrapassar os limites do quadrado a ser coberto.

PROBLEMA 6:

Arnaldo e Beatriz se comunicam durante um acampamento usando sinais de fumaça, às vezes usando uma nuvem grande, às vezes uma pequena.

No tempo disponível antes do café da manhã, Arnaldo consegue enviar uma seqüência de 24 nuvens. Como Beatriz nem sempre consegue distinguir uma nuvem pequena de uma grande, ela e Arnaldo fizeram um dicionário antes de ir para o acampamento. No dicionário aparecem N seqüências de 24 tamanhos de nuvem (como por exemplo a seqüência $PGPGPGPGPGGGPGPGPGPGP$, onde G significa nuvem grande e P significa nuvem pequena). Para cada uma das N seqüências, o dicionário indica seu significado. Para evitar interpretações erradas, Arnaldo e Beatriz evitaram incluir no dicionário seqüências parecidas. Mais precisamente, duas seqüências no dicionário sempre diferem em pelo menos 8 das 24 posições.

Demonstre que $N \leq 4096$.