

XX OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

Terceira Fase - Nível 1

Instruções:

- ♦ A duração da prova é de 4 horas e 30 minutos.
- ♦ Não é permitido o uso de calculadora nem consulta a livros ou notas.
- ♦ Você pode solicitar papel para rascunho.
- ♦ Todas as suas soluções devem ser justificadas.

PROBLEMA 1

Considere a tabela 3×3 abaixo, onde todas as casas, inicialmente, contém zeros:

0	0	0
0	0	0
0	0	0

Para alterar os números da tabela, é permitida a seguinte operação: escolher uma sub-tabela 2×2 formada por casas adjacentes, e somar 1 a todos os seus números.

- a) Diga se é possível, após uma seqüência de operações permitidas, chegar à tabela abaixo:

7	9	2
15	25	12
8	18	10

- b) Complete o quadro abaixo, sabendo que foi obtido por uma seqüência de operações permitidas:

14		
19	36	
	14	

PROBLEMA 2

Encontre uma maneira de se escrever os algarismos de 1 a 9 em seqüência, de forma que os números determinados por quaisquer dois algarismos consecutivos sejam divisíveis ou por 7 ou por 13.

PROBLEMA 3

Em um jogo existem 20 buracos vazios em fila e o jogador deve colocar um pino em cada buraco de acordo com as seguintes regras:

- a) Se colocar um pino em um buraco e se os dois buracos vizinhos estiverem vazios, o pino permanece.
- b) Se colocar um pino em um buraco e se um dos buracos vizinhos estiver ocupado, o pino deste buraco vizinho deve ser retirado.
- c) Se colocar um pino em um buraco e se os dois buracos vizinhos estiverem ocupados, então um dos pinos vizinhos deve ser retirado.

Determine qual é o número máximo de pinos que podem ser colocados.

PROBLEMA 4

Sete números naturais são escritos em círculo. Sabe-se que, em cada par de números vizinhos, um deles divide o outro. Mostre que há dois números não vizinhos com a mesma propriedade (isto é: um deles divide o outro).