XX OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

Terceira Fase - Nível 3

Primeira Prova.

Instruções:

- A duração da prova é de 4 horas e 30 minutos.
- Não é permitido o uso de calculadora nem consulta a livros ou notas.
- Você pode solicitar papel para rascunho.
- Todas as suas soluções devem ser justificadas.

PROBLEMA 1

São dados 15 números naturais maiores que 1 e menores que 1998 tais que dois quaisquer são primos entre si. Mostre que pelo menos um desses 15 números é primo.

PROBLEMA 2

No triângulo ABC, D é o ponto médio de AB e E o ponto do lado BC tal que $BE = 2 \,.\, EC$. Dado que os ângulos $A\hat{D}C$ e $B\hat{A}E$ são iguais, encontre o ângulo $B\hat{A}C$.

PROBLEMA 3

Duas pessoas disputam um jogo da maneira descrita a seguir.

Inicialmente escolhem dois números naturais: $n \geq 2$ (o número de rodadas) e $t \geq 1$ (o incremento máximo).

Na primeira rodada o jogador A escolhe um natural $m_1 > 0$ e, posteriormente, o jogador B escolhe um natural positivo $n_1 \neq m_1$.

Para $2 \leq k \leq n$, na rodada k o jogador A escolhe um natural m_k com $m_{k-1} < m_k \leq m_{k-1} + t$ e posteriormente o jogador B escolhe um natural n_k com $n_{k-1} < n_k \leq n_{k-1} + t$. Após essas escolhas, nessa k – ésima rodada, o jogador A ganha mdc (m_k, n_{k-1}) pontos e o jogador B ganha mdc (m_k, n_k) pontos. Ganha o jogo o jogador com maior pontuação total ao fim das n rodadas. Em caso de pontuações totais iguais o jogador A é considerado vencedor.

Para cada escolha de n e t, determine qual dos jogadores possui estratégia vencedora.

XX OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

Terceira Fase - Nível 3

Segunda Prova.

Instruções:

- A duração da prova é de 4 horas e 30 minutos.
- Não é permitido o uso de calculadora nem consulta a livros ou notas.
- Você pode solicitar papel para rascunho.
- Todas as suas soluções devem ser justificadas.

PROBLEMA 4

Dois meninos jogam o seguinte jogo. O primeiro escolhe dois números inteiros diferentes de zero e o segundo monta uma equação do segundo grau usando como coeficientes os dois números escolhidos pelo primeiro jogador e 1998, na ordem que quiser (ou seja, se o primeiro jogador escolhe *a* e *b* o segundo jogador pode montar a equação $1998x^2 + ax + b = 0$, ou $bx^2 + 1998x + a = 0$, etc.)
O primeiro jogador é considerado vencedor se a equação tiver duas raízes racionais diferentes.
Mostre que o primeiro jogador pode ganhar sempre.

PROBLEMA 5

Determine todas as funções $f : \mathrm{N} \to \mathrm{N}$ que satisfazem $f(2f(x)) = x + 1998$ para todo $x \in \mathrm{N} = \{0,1,2,...\}$.

PROBLEMA 6

Dois matemáticos, perdidos em Berlim, chegam à esquina da rua Barbarossa com a rua Martin Luther, e precisam chegar à esquina da rua Meininger com a rua Martin Luther. Infelizmente eles não sabem para que lado fica a rua Meininger, nem a que distância ela está, e eles são obrigados portanto a ir e voltar ao longo da rua Martin Luther até chegaram à esquina desejada.
Qual é o menor valor para o número positivo *K* tal que eles podem ter certeza de que se há *N* quarteirões (ou quadras) entre as ruas Barbarossa e Meininger então eles conseguem chegar ao destino andando no máximo *KN* quarteirões (ou quadras)?