39ª OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

1ª Fase – Nível Universitário

GABARITO

Olimpíada Brasileira de Matemática

Problema 1 Determine o menor número positivo A tal que, dados dois quadrados cuja soma das áreas é igual a 2017, é sempre possível encaixar esses dois quadrados, sem sobreposição, num retângulo de área A, sendo os lados dos quadrados paralelos aos lados do retângulo.

Gabarito: Se a e b são os lados do quadrado então $a^2 + b^2 = 2017$.
[1 ponto]
Se $a \geq b$, o menor lado do retângulo é no mínimo igual a a, e o maior é no mínimo igual a $a + b$. Assim, dados a e b, a área de um retângulo como no enunciado é no mínimo $a(a + b)$.
[2 pontos]
Se $a \geq b$, como $a^2 + b^2 = 2017$, $2017 \geq a^2 \geq \frac{a^2+b^2}{2} = 2017/2$, donde $\sqrt{2017} \geq a \geq \sqrt{2017/2}$ e $b = \sqrt{2017 - a^2}$. O menor valor possível de A é portanto o máximo da função $f(a) = a(a + \sqrt{2017 - a^2})$ com $\sqrt{2017/2} \leq a \leq \sqrt{2017}$.
[2 pontos]
Derivando $f(a)$, temos

$$f'(a) = 2a + \sqrt{2017 - a^2} - \frac{a^2}{\sqrt{2017 - a^2}} = 2a + \frac{2017 - 2a^2}{\sqrt{2017 - a^2}},$$

que vale $2\sqrt{2017/2} > 0$ quando $a = \sqrt{2017/2}$, tende a $-\infty$ quando a tende a $\sqrt{2017}$. Assim, quando $f(a)$ é máximo, $f'(a)$ se anula. Por outro lado, $f'(a)$ se anula quando $2a^2 - 2017 = 2a\sqrt{2017 - a^2}$, ou seja, quando $(2a^2 - 2017)^2 = 4a^2(2017 - a^2)$, ou seja, quando $4a^4 - 4 \cdot 2017a^2 + 2017^2 = 4 \cdot 2017a^2 - 4a^4$, o que equivale a $8a^4 - 8 \cdot 2017a^2 + 2017^2 = 0$, que implica $a^2 = \frac{4 \cdot 2017 \pm \sqrt{8 \cdot 2017^2}}{8} = 2017 \cdot \frac{2 \pm \sqrt{2}}{4}$, e como $a^2 \geq 2017/2$, temos $a^2 = 2017(2 + \sqrt{2})/4$, donde $2017 - a^2 = 2017(2 - \sqrt{2})/4$, $a^2(2017 - a^2) = 2017^2/8$, $a\sqrt{2017 - a^2} = 2017\sqrt{2}/4$, e logo

$$A = f(a) = a^2 + a\sqrt{2017 - a^2} = 2017 \cdot \frac{2 + \sqrt{2}}{4} + 2017\frac{\sqrt{2}}{4} = 2017 \cdot \frac{1 + \sqrt{2}}{2}.$$

[5 pontos]: 1 ponto por calcular a derivada de f, **2 pontos** por mostrar que o máximo de f é atingido em um ponto crítico (e não nos extremos do intervalo de definição de f) e **2 pontos** por encontrar o ponto crítico de f em seu intervalo de definição, mostrar que é único e concluir.

Problema 2 Considere a sequência $a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k}$, para $n \geq 1$.

a) Determine $\lim_{n\to\infty} a_n$.

b) Determine $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{2^n(2 - a_n)}{n + 1} \right)^{n+1}$.

Gabarito:

a) **[3 pontos]** Podemos encontrar uma fórmula explícita para a_n em função de n:

$$\begin{aligned} a_n &= \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=k}^{n} \frac{1}{2^i} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=k}^{n} \left(\frac{1}{2^{i-1}} - \frac{1}{2^i} \right) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2^{k-1}} - \frac{1}{2^n} \right) \\ &= 2 - \frac{1}{2^{n-1}} - \frac{n}{2^n} \\ &= 2 - \frac{n+2}{2^n}. \end{aligned}$$

[2 pontos] Como $\lim_{x\to\infty} \frac{x+2}{2^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{2^x \ln 2} = 0$, segue que

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 2.$$

b) **[2 pontos]** Em virtude da relação obtida no item anterior, temos

$$\frac{2^n(2-a_n)}{n+1} = \frac{n+2}{n+1}.$$

[3 pontos]

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2^n(2-a_n)}{n+1}\right)^{n+1} &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1}\\ &= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\\ &= e.\end{aligned}$$

Problema 3 Considere a elipse de equação $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$. Um *semi-diâmetro* da elipse é um segmento OM, onde $O=(0,0)$ é o centro da elipse e M é um ponto da elipse. Um ângulo reto formado por dois semi-diâmetros da elipse OM e ON gira ao redor do ponto O.

a) Demonstre que $\dfrac{1}{OM^2}+\dfrac{1}{ON^2}$ é constante.

b) Ache a envoltória da família formada pelas cordas MN.

Obs.: A envoltória de uma família de cordas é uma curva fechada que é tangente a todas as cordas da família.
Gabarito:

(a) **[5 pontos]** Sejam $M=(x_1,y_1)$ e $N=(x_2,y_2)$ e suponha que M pertença à reta pela origem $y=mx$ de coeficiente angular $m\neq 0$. Então N pertence à reta perpendicular pela origem $y=-\frac{x}{m}$. Como M e N são pontos da elipse, temos

$$1=\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2} \iff 1=\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{(mx_1)^2}{b^2} \iff \frac{1}{x_1^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{m^2}{b^2}$$

e

$$1=\frac{x_2^2}{a^2}+\frac{y_2^2}{b^2} \iff 1=\frac{x_2^2}{a^2}+\frac{(-x_2/m)^2}{b^2} \iff \frac{1}{x_2^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{(mb)^2}$$

Portanto

$$\frac{1}{OM^2}+\frac{1}{ON^2}=\frac{1}{x_1^2+y_1^2}+\frac{1}{x_2^2+y_2^2}=\frac{1}{x_1^2+(mx_1)^2}+\frac{1}{x_2^2+(-x_2/m)^2}$$

$$=\frac{1}{x_1^2}\cdot\frac{1}{1+m^2}+\frac{1}{x_2^2}\cdot\frac{m^2}{1+m^2}=\left(\frac{1}{a^2}+\frac{m^2}{b^2}\right)\cdot\frac{1}{1+m^2}+\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{(mb)^2}\right)\cdot\frac{m^2}{1+m^2}$$

$$=\frac{1}{a^2}\cdot\frac{1+m^2}{1+m^2}+\frac{1}{b^2}\cdot\frac{m^2+1}{1+m^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}$$

que é constante, independente de M e N.

Se $m=0$ (i.e., $M=(\pm a,0)$ e $N=(0,\pm b)$) ou se M pertence à reta vertical pela origem (i.e., $M=(0,\pm b)$ e $N=(\pm a,0)$) é claro que $\frac{1}{OM^2}+\frac{1}{ON^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}$ também nestes casos, de modo que o resultado é válido em geral.

(b) **[5 pontos]** Vamos mostrar que a distância entre a reta $\overleftrightarrow{MN}$ e a origem é constante. De fato, esta distância, digamos d, é igual à altura do triângulo retângulo $\triangle OMN$ com relação à hipotenusa $\overline{MN}$, logo

$$d\cdot MN = OM\cdot ON$$

$$\iff d=\frac{OM\cdot ON}{\sqrt{OM^2+ON^2}}=\frac{1}{\sqrt{\dfrac{OM^2+ON^2}{OM^2\cdot ON^2}}}=\frac{1}{\sqrt{\dfrac{1}{ON^2}+\dfrac{1}{OM^2}}}$$

Assim, pelo item anterior, d é constante e igual a $d=(a^{-2}+b^{-2})^{-1/2}$. Portanto a envoltória pedida será uma circunferência com centro na origem e raio $(a^{-2}+b^{-2})^{-1/2}$.

Critério:

- Qualquer outro cálculo correto no item (a). **[5 pontos]**

- No item (a), somente escrever equações corretas que expressam o fato de $OM \perp ON$, mas não concluir. **[1 ponto]**
- Pequenos erros de conta, mas que não comprometem o resultado final: **[-1 ponto]**
- No item (b), conjecturar que a distância entre a reta $\overleftrightarrow{MN}$ e a origem é constante (ou que a envoltória é uma circunferência com centro na origem), mas não concluir. **[2 pontos]**

Problema 4

Defina $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ por

$$f(x) = \sum_{k \geq 0} \frac{1}{(x+k)^2} = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{(x+2)^2} + \cdots + \frac{1}{(x+k)^2} + \cdots .$$

Obtenha constantes $a \neq 0$ e b e c tais que valha

$$f(x) = x^{-c}(a + bx^{-1} + r(x)),$$

com

$$\lim_{x \to +\infty} x \cdot r(x) = 0.$$

Gabarito: Considere a integral

$$I_x = \int_x^{+\infty} \frac{dt}{t^2} = \frac{1}{x}.$$

O método dos trapézios dá uma boa aproximação, com erro $E(x)$:

$$\begin{aligned} I_x &= \left(\frac{1}{2x^2} + \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{(x+2)^2} + \cdots + \frac{1}{(x+k)^2} + \cdots \right) - E(x) \\ &= f(x) - \frac{1}{2x^2} - E(x) \end{aligned}$$

donde

$$f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + E(x) = x^{-c}(a + bx^{-1} + r(x)),$$

onde

$$a = 1, \quad b = \frac{1}{2}, \quad c = 1, \quad r(x) = xE(x).$$

[**5 pontos** por fazer a solução até este ponto, ou por obter por qualquer outro processo razoável os valores corretos de a, b e c sem a devida justificativa de que o erro seja pequeno. **4 pontos** por conjecturar os valores corretos de a, b e c (sem nenhuma justificativa). **1 ponto** por conjecturar corretamente os valores de a e de c.]

Resta provar que

$$\lim_{x \to +\infty} x^2 \cdot E(x) = 0.$$

Seja $h_x(t) = A_x t + B_x - \frac{1}{t^2}$ onde A_x e B_x são tais que $h_x(x) = h_x(x+1) = 0$. Assim,

$$J_x = \int_x^{x+1} h_x(t) dt$$

é a área da "bochechinha" entre o trapézio e a curva $y = \frac{1}{t^2}$ no intervalo $t \in [x, x+1]$ e portanto

$$E(x) = J_x + J_{x+1} + \cdots + J_{x+k} + \cdots .$$

Fazendo integração por partes duas vezes, obtemos

$$J_x = -\frac{1}{2} \int_x^{x+1} (t-x)(t-(x+1))h''(t) dt = 3 \int_x^{x+1} \frac{(t-x)(t-(x+1))}{t^4} dt$$

donde

$$0 < J_x < \frac{3}{4} \int_x^{x+1} \frac{dt}{t^4}$$

e portanto

$$0 < E(x) < \frac{3}{4} \int_x^{+\infty} \frac{dt}{t^4} = \frac{x^3}{4},$$

o que implica na estimativa necessária.

[**5 pontos** por esta demonstração ou outra equivalente de que o erro satisfaz a estimativa pedida. Uma solução que obtenha apenas a e c (mesmo com justificativa) vale no máximo **2 pontos**. Uma solução essencialmente correta mas com o valor errado de b (por erros de conta) vale no máximo **4 pontos**.]

Problema 5 Determine o menor inteiro positivo m tal que para qualquer escolha de m inteiros em $[-2017, 2017]$ existem três deles cuja soma é zero.

Gabarito: A resposta é $m = 2019$. Para mostrar que $m \geq 2019$, basta ver que o conjunto $\{0, 1, 2, \ldots, 2017\}$ contém 2018 inteiros de $[-2017, 2017]$ e a soma de quaisquer três de seus elementos distintos não é zero. Mostremos agora que esse é o mínimo. Seja S um conjunto qualquer com 2019 inteiros do intervalo do enunciado.

Se 0 pertence a S, considere os 2017 pares de inteiros:

$$(-1, 1), (-2, 2), (-3, 3), \ldots, (-2017, 2017).$$

Qualquer escolha de 2018 inteiros distintos de 0 terá dois elementos, digamos $-k$ e k, que produzirão a soma $-k + 0 + k = 0$.

Suponha que 0 não pertence a S. Vamos provar a seguinte afirmação por indução: Suponha que $T_k \subset [-(2k+1), (2k+1)] - \{0\}$ não possui três elementos com soma 0, então $|T_k| \leq 2k+2$. Para $k = 0$, o resultado é imediato, pois $-1 + 0 + 1 = 0$. Suponha que a afirmação vale para k e considere um conjunto $T_{k+1} \subset [-(2k+3), (2k+3)] - \{0\}$ tal que a soma de quaisquer três de seus elementos distintos é não nula. Seja

$$R = \{-(2k+3), -(2k+2), (2k+2), (2k+3)\} \cap T_{k+1}.$$

Se $|R| \leq 2$, pela hipótese de indução,

$$|T_{k+1}| = |T_{k+1} \cap [-(2k+1), (2k+1)]| + |R| \leq (2k+2) + 2 = 2k+4.$$

Tratemos agora do caso em que $|R| \geq 3$. Nesse caso, R possui dois elementos de mesmo sinal que, sem perda de generalidade, podem ser considerados $-(2k+3)$ e $-(2k+2)$. Devemos analisar agora duas possibilidade para R.

i) Se $R = \{-(2k+3), -(2k+2), (2k+3)\}$, considerando as listas de pares:

$$\begin{gathered}(1, (2k+2)), (2, (2k+1)), \ldots, ((k+1), (k+2)),\\ (-1, -(2k+2)), (-2, -(2k+1), \ldots, (-(k+1), -(k+2)).\end{gathered}$$

Como o simétrico da soma dos dois elementos de qualquer um desses pares está em $R \subset T_{k+1}$, apenas um elemento de cada par pode pertencer a T_{k+1}. Daí, $|T_{k+1}| \leq (k+1) + (k+1) + 2 = 2k+4$.

ii) Se $R = \{-(2k+3), -(2k+2), (2k+2)\}$, considere as listas de pares:

$$\begin{gathered}(1, (2k+2)), (2, (2k+1)), \ldots, ((k+1), (k+2))\\ (-1, -(2k+1)), (-2, -2k, \ldots, (-k, -(k+2)).\end{gathered}$$

Como o simétrico da soma dos dois elementos de qualquer um desses pares está em $R \subset T_{k+1}$, apenas um elemento de cada par pode pertencer a T_{k+1}. Daí, $|T_{k+1}| \leq (k+1) + k + 3 = 2k+4$.

Critério:

- Exibir um exemplo para mostrar que $m \geq 2019$: **[2 pontos]**.
- Estudar o caso $0 \in S$: **[1 ponto]**.
- Usar o Princípio da Casa dos Pombos para mostrar que se $2t+1 \in S$, então apenas um elemento de cada um dos pares a seguir pode ser escolhido:

  $$(-1, -2t), (-2, -(2t-1)), \ldots (-t, -(t+1)).$$

  [2 pontos]
- Concluir o problema: **[5 pontos]**.

Problema 6 Sejam $k_1, k_2, \cdots, k_n$ inteiros não-negativos. Seja M a matriz $n \times n$ com entradas

$$M_{i,1} = t^{k_i}, \qquad M_{i,j+1} = \frac{d}{dt} M_{i,j}.$$

Prove que exitem constantes C e r para as quais

$$\det(M) = Ct^r.$$

Encontre fórmulas simples para C e r.

Gabarito: Divida a i-ésima linha por t^{k_i} e multiplique a j-ésima coluna por t^{j-1} para obter a matriz constante A com

$$A_{i,j} = P_{j-1}(k_i)$$

onde

$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x, \quad P_j(x) = x(x-1)\cdots(x-(k-1)).$$

Temos assim $\det(M) = Ct^r$ para

$$C = \det(A), \quad r = -\frac{n(n-1)}{2} + \sum_i k_i.$$

[4 pontos por chegar neste ponto (sem simplificar).]

Para simplificar $\det(A)$, vamos fazer operações em colunas da esquerda para a direita. Podemos trocar a coluna 3 de $P_2(k_i)$ por k_i^2 somando múltiplos apropriados das duas primeiras colunas pois P_2 é mônico de grau 2. Depois disso, podemos trocar a coluna 4 de $P_3(k_i)$ por k_i^3 somando múltiplos apropriados das três primeiras colunas pois P_3 é mônico de grau 3. Prosseguindo desta forma, temos $\det(A) = \det(V)$ onde V é uma matriz de Vandermonde:

$$V_{i,j} = k_i^{(j-1)}.$$

Assim

$$C = \det(V) = \prod_{i_1 > i_0} (k_{i_1} - k_{i_0}).$$

[6 pontos por efetuar a simplificação.]