39ª OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

1ª Fase – Nível Universitário

Problema 1. Determine o menor número positivo A tal que, dados dois quadrados cuja soma das áreas é igual a 2017, é sempre possível encaixar esses dois quadrados, sem sobreposição, num retângulo de área A, sendo os lados dos quadrados paralelos aos lados do retângulo.

Problema 2. Considere a sequência $a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k}$, para $n \geq 1$.

a) Determine $\lim_{n\to\infty} a_n$.

b) Determine $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{2^n(2-a_n)}{n+1}\right)^{n+1}$.

Problema 3. Considere a elipse de equação $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Um *semi-diâmetro* da elipse é um segmento OM, onde $O = (0,0)$ é o centro da elipse e M é um ponto da elipse. Um ângulo reto formado por dois semi-diâmetros da elipse OM e ON gira ao redor do ponto O.

a) Demonstre que $\frac{1}{OM^2} + \frac{1}{ON^2}$ é constante.

b) Ache a envoltória da família formada pelas cordas MN.

Obs.: A envoltória de uma família de cordas é uma curva fechada que é tangente a todas as cordas da família.

Problema 4.
Defina $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ por

$$f(x) = \sum_{k\geq 0} \frac{1}{(x+k)^2} = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{(x+2)^2} + \cdots + \frac{1}{(x+k)^2} + \cdots .$$

Obtenha constantes $a \neq 0$ e b e c tais que valha

$$f(x) = x^{-c}(a + bx^{-1} + r(x)),$$

com

$$\lim_{x\to+\infty} x \cdot r(x) = 0.$$

Problema 5. Determine o menor inteiro positivo m tal que para qualquer escolha de m inteiros em $[-2017, 2017]$ existem três deles cuja soma é zero.

Problema 6. Sejam $k_1, k_2, \cdots, k_n$ inteiros não-negativos. Seja M a matriz $n \times n$ com entradas

$$M_{i,1} = t^{k_i}, \qquad M_{i,j+1} = \frac{d}{dt} M_{i,j}.$$

Prove que exitem constantes C e r para as quais

$$\det(M) = Ct^r.$$

Encontre fórmulas simples para C e r.