39ª OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

2ª Fase – Nível Universitário

PRIMEIRO DIA

Olimpíada Brasileira de Matemática

Problema 1.

Dizemos que um polinômio é *positivista* se ele pode ser escrito como o produto de dois polinômios não constantes com coeficientes reais maiores ou iguais a 0. Seja $f(x)$ um polinômio não nulo tal que $f(x^n)$ é positivista para algum inteiro positivo n. Prove que $f(x)$ é positivista.

Observação: O enunciado do problema 1, tal como proposto, está incorreto. Faltou adicionar a hipótese de que f tem grau maior que 1 (ou, alternativamente, que o coeficiente constante de f é não-nulo). A conclusão do problema, tal como proposto, é falsa para $f(x) = cx$, com c inteiro positivo. Os alunos que derem um contra-exemplo correto ganharão pontuação total, bem como os alunos que corrigirem o enunciado agregando uma hipótese como as mencionadas acima e a partir daí resolverem o problema. A banca da prova pede desculpas a todos pelo ocorrido.

Problema 2.

Fixados os inteiros positivos a e b, mostre que o conjunto dos divisores primos dos termos da sequência $a_n = a \cdot 2017^n + b \cdot 2016^n$ é infinito.

Problema 3.

Sejam $X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | y \geq 0, x^2 + y^2 = 1\} \cup \{(x,0), -1 \leq x \leq 1\}$ o bordo de um semi-disco fechado de raio 1.

a) Seja $n > 1$ um inteiro e $P_1, P_2, \ldots, P_n \in X$. Prove que existe uma permutação $\sigma : \{1,2,\ldots,n\} \to \{1,2,\ldots,n\}$ tal que

$$\sum_{j=1}^{n} |P_{\sigma(j+1)} - P_{\sigma(j)}|^2 \leq 8,$$

onde definimos $\sigma(n+1) = \sigma(1)$.

b) Determine os conjuntos $\{P_1, P_2, \ldots, P_n\} \subset X$ tais que, para qualquer permutação $\sigma : \{1,2,\ldots,n\} \to \{1,2,\ldots,n\}$,

$$\sum_{j=1}^{n} |P_{\sigma(j+1)} - P_{\sigma(j)}|^2 \geq 8.$$

(onde $\sigma(n+1) = \sigma(1)$).

39ª OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

2ª Fase – Nível Universitário

SEGUNDO DIA

Olimpíada Brasileira de Matemática

Problema 4.

Seja $(a_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de termos (estritamente) positivos com $\lim a_n = 0$ tal que, para um certo $c > 0$ e para todo $n \geq 1$, $|a_{n+1} - a_n| \leq c \cdot a_n^2$. Prove que existe $d > 0$ com $n \cdot a_n \geq d, \forall n \geq 1$.

Problema 5.

Sejam $d \leq n$ inteiros positivos e A uma matriz real $d \times n$, a qual induz uma transformação linear de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^d$ por $v \to A.v$ (vemos os elementos de $\mathbb{R}^n$ como vetores coluna). Seja $\sigma(A)$ o supremo sobre todos os subespaços W de dimensão d de $\mathbb{R}^n$ de $\inf_{v\in W,|v|=1} |A \cdot v|$.

Para cada $j \leq d$, seja $r(j) \in \mathbb{R}^n$ o j-ésimo vector-linha de A, ou seja, $r(j) = A^t \cdot e_j$, onde e_j é o j-ésimo elemento da base canônica de $\mathbb{R}^d$. Prove que

$$\sigma(A) \leq \min_{i\leq d} d(r(i), \langle r(j), j \neq i\rangle) \leq \sqrt{n} \cdot \sigma(A).$$

Obs.: $|\cdot|$ denota a norma euclidiana; A^t é a matriz transposta de A; $d(r(i), \langle r(j), j \neq i\rangle)$ denota a distância de $r(i)$ ao subespaço de $\mathbb{R}^n$ gerado pelos vetores $r(j)$, $1 \leq j \leq d, j \neq i$.

Problema 6.

Vamos considerar aqui *palavras* sobre o alfabeto $\{a, b\}$: sequências de a's e b's de comprimento finito. Escrevemos $u \leq v$ se u é uma *subpalavra* de v, isto é, podemos obter u a partir de v apagando algumas letras de v (exemplo: $aba \leq abbab$). Dizemos que uma palavra u *distingue* as palavras x e y se $u \leq x$ mas não vale que $u \leq y$ ou vice-versa (não vale que $u \leq x$ mas $u \leq y$).

Sejam m e l inteiros positivos. Dizemos que duas palavras x e y são *m-equivalentes* se *não* existe u de comprimento $\leq m$ que distingue x e y.

a) Prove que se $2m \leq l$, então existem duas palavras distintas x e y de comprimento l que são m-equivalentes.

b) Prove que se $2m > l$, então duas palavras distintas x e y de comprimento l não podem ser m-equivalentes.