Sábado, 8 de abril de 2017

Problema 1. Seja $ABCD$ um quadrilátero convexo com $\angle DAB = \angle BCD = 90°$ e $\angle ABC > \angle CDA$. Sejam Q e R pontos sobre os segmentos BC e CD, respectivamente, tais que a reta QR intersecta as retas AB e AD nos pontos P e S, respectivamente. É dado que $PQ = RS$. Seja M o ponto médio de BD e seja N o ponto médio de QR. Prove que os pontos M, N, A e C estão sobre uma mesma circunferência.

Problema 2. Encontre o menor inteiro positivo k para o qual existe uma coloracão dos inteiros positivos $\mathbb{Z}_{>0}$ com k cores e uma função $f : \mathbb{Z}_{>0} \to \mathbb{Z}_{>0}$ com as seguintes duas propriedades:

(i) Para todos inteiros positivos m, n de mesma cor, $f(m + n) = f(m) + f(n)$.

(ii) Há dois inteiros positivos m, n tais que $f(m + n) \neq f(m) + f(n)$.

Em uma coloração de $\mathbb{Z}_{>0}$ com k cores, todo inteiro é pintado com exatamente uma das k cores. Em ambas propriedades (i) e (ii) os inteiros positivos m, n não são necessariamente diferentes.

Problema 3. Há 2017 retas no plano tais que não existem três que passam por um mesmo ponto. Turbo, a caracol, está sobre um ponto em exatamente uma das retas e começa a se mover sobre as retas da seguinte maneira: ela se move em uma dada reta até encontrar uma intersecção de duas retas. Na intersecção, ela segue sua jornada virando à direita ou à esquerda, alternando sua escolha a cada intersecção que ela atinge. Ela só pode mudar de sentido nos pontos de intersecção. Pode existir um segmento de reta através do qual ela passa em ambos os sentidos durante a sua jornada?

Duração: 4 horas e 30 minutos
Cada problema vale 7 pontos

Domingo, 9 de abril de 2017

Problema 4. Seja $n \geq 1$ um inteiro e sejam $t_1 < t_2 < \ldots < t_n$ inteiros positivos. Em um grupo de $t_n + 1$ pessoas, algumas partidas de xadrez são jogadas. Duas pessoas podem jogar uma contra outra no máximo uma vez. Prove que é possível que ambas as condições a seguir sejam satisfeitas ao mesmo tempo:

(i) O número de partidas jogadas por cada pessoa é um dos números $t_1, t_2, \ldots, t_n$.

(ii) Para cada i com $1 \leq i \leq n$, há alguém que jogou exatamente t_i partidas de xadrez.

Problema 5. Seja $n \geq 2$ um inteiro. Uma n-upla $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ de inteiros positivos, não necessariamente diferentes, é *dispendiosa* se há algum inteiro positivo k tal que

$$(a_1 + a_2)(a_2 + a_3) \cdot \cdots \cdot (a_{n-1} + a_n)(a_n + a_1) = 2^{2k-1}.$$

a) Encontre todos os inteiros $n \geq 2$ para os quais existe uma n-upla dispendiosa .

b) Prove que para todo inteiro positivo ímpar m existe um inteiro $n \geq 2$ tal que m pertence a uma n-upla dispendiosa.

Existem exatamente n fatores no produto do lado esquerdo.

Problema 6. Seja ABC um triângulo acutângulo no qual não há dois lados com a mesma medida. As reflexões do baricentro G e do circuncentro O de ABC através dos lados BC, CA, AB são denotadas por G_1, G_2, G_3, e O_1, O_2, O_3, respectivamente. Mostre que os circuncírculos dos triângulos G_1G_2C, G_1G_3B, G_2G_3A, O_1O_2C, O_1O_3B, O_2O_3A e ABC têm um ponto em comum.

O baricentro de um triângulo é o ponto de intersecção de suas três medianas. Uma mediana é um segmento ligando um vértice do triângulo ao ponto médio de seu lado oposto.