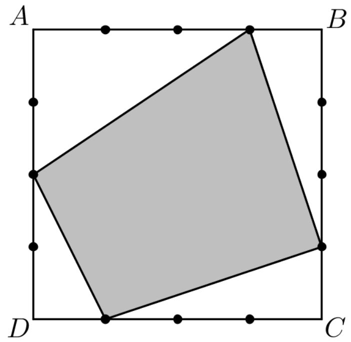
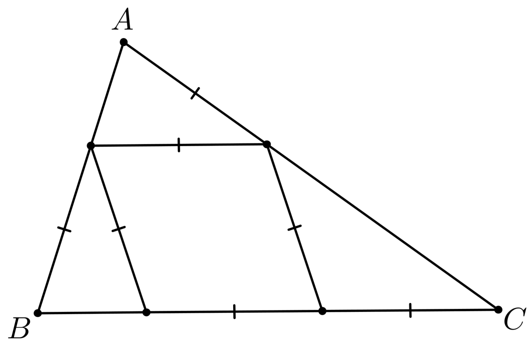
Problems of 4th Iranian Geometry Olympiad 2017 (Elementary)

1. Each side of square $ABCD$ with side length of 4 is divided into equal parts by three points. Choose one of the three points from each side, and connect the points consecutively to obtain a quadrilateral. Which numbers can be the area of this quadrilateral? Just write the numbers without proof.



2. Find the angles of triangle ABC.



3. In the regular pentagon $ABCDE$, the perpendicular at C to CD meets AB at F. Prove that $AE + AF = BE$.

4. $P_1, P_2, \ldots, P_{100}$ are 100 points on the plane, no three of them are collinear. For each three points, call their triangle clockwise if the increasing order of them is in clockwise order. Can the number of clockwise triangles be exactly 2017?

5. In the isosceles triangle ABC ($AB = AC$), let l be a line parallel to BC through A. Let D be an arbitrary point on l. Let E, F be the feet of perpendiculars through A to BD, CD respectively. Suppose that P, Q are the images of E, F on l. Prove that $AP + AQ \le AB$.

Time : 4 *hours*
Each problem is worth 8 *points*

Problems of 4th Iranian Geometry Olympiad 2017 (Intermediário)

1. Seja ABC um triângulo acutângulo com $A = 60°$. Sejam E e F os pés das alturas por B e C, respectivamente. Prove que $CE - BF = \frac{3}{2}(AC - AB)$.

2. Duas circunferências ω_1 e ω_2 se intersectam nos pontos A e B. Uma reta qualquer por B corta ω_1 e ω_2 em C e D, respectivamente. Os pontos E e F são escolhidos sobre ω_1 e ω_2, respectivamente, de modo que $CE = CB$ e $BD = DF$. Suponha que BF intersecta ω_1 em P e que BE intersecta ω_2 em Q. Prove que A, P e Q são colineares.

3. São dados n pontos no plano ($n > 2$). Não há três deles colineares. Através de cada par desses pontos a reta é traçada e entre os outros pontos dados aquele mais próximo a essa reta é marcado (acontece em cada caso desse ponto ser único). Qual é o maior número possível de pontos marcados para cada n dado?

4. No triângulo isósceles ABC ($AB = AC$), seja l a reta paralela a BC por A. Seja D um ponto qualquer sobre a reta l. Sejam E e F os pés das perpendiculares por A a BD e a CD, respectivamente. Suponha que P e Q são as projeções de E e F sobre l. Prove que $AP + AQ \leq AB$.

5. Sejam X e Y dois pontos sobre o lado BC do triângulo ABC tais que $2XY = BC$ (X está entre B e Y). Seja AA' o diâmetro do circuncírculo do triângulo AXY. Seja P o ponto onde AX intersecta a perpendicular a BC por B e Q o ponto onde AY intersecta a perpendicular a BC por C. Prove que a reta tangente por A' ao circuncírculo do triângulo AXY passa pelo circuncentro do triângulo APQ.

Duração : 4 *horas e* 30 *minutos*
Cada problema vale 8 *pontos*

Problems of 4th Iranian Geometry Olympiad 2017 (Avançado)

1. No triângulo ABC o incírculo, com centro I, tangencia o lado BC no ponto D. A reta DI intersecta AC no ponto X. A reta tangente por X ao incírculo (diferente de AC) intersecta AB no ponto Y. Se YI e BC se intersectam no ponto Z, prove que $AB = BZ$.

2. Nós temos seis círculos disjuntos dois a dois de modo que o raio de cada um é pelo menos um. Prove que o raio de um círculo que intersecte todos os seis círculos é pelo menos um.

3. Seja O o circuncentro do triângulo ABC. A reta CO intersecta a altura por A no ponto K. Sejam P e M os pontos médios de AK e AC, respectivamente. Se PO intersecta BC no ponto Y e o circuncírculo do triângulo BCM intersecta AB no ponto X, prove que $BXOY$ é cíclico.

4. Três circunferências ω_1, ω_2 e ω_3 são tangentes a reta l nos pontos A, B e C (B está entre A e C) e ω_2 tangencia externamente as outras duas. Sejam X e Y os pontos de interseção de ω_2 com a outra tangente externa comum a ω_1 e ω_3. A reta perpendicular por B à reta l intersecta ω_2 novamente no ponto Z. Prove que a circunferência com diâmetro AC tangencia ZX e ZY.

5. A esfera S tangencia um plano. Sejam A, B, C e D quatro pontos desse plano tal que não há três deles colineares. Considere o ponto A' tal que S é tangente às faces do tetraedro $A'BCD$. Os pontos B', C' e D' são definidos de maneira análoga. Prove que os pontos A', B', C' e D' são coplanares e que o plano $A'B'C'D'$ é tangente a S.

Duração : 4 horas e 30 minutos
Cada problema vale 8 pontos